

## マクロ経済学 II (上級マクロ経済学後期) 宿題第 4 回

レポートの第 1 枚目上部に専攻・学年・学籍番号・氏名を記入してください。電卓を使用しても良いが、主要な導出過程を明記すること。解が小数となる場合は、有効数字 3 桁でよい (その次の桁を四捨五入すること)

**問題 1.** Ramsey 成長モデルに不確実性を導入した、次のような stochastic growth problem を考えよう。一人あたりの資本ストックを  $k_t$  としたとき、一人あたりの生産関数を  $A_t f(k_t)$  をする。ここで、 $A_t$  は  $t$  期における生産性 (TFP) で、マルコフ過程

$$A_{t+1} = g(A_t, \epsilon_{t+1}), \quad A_0 > 0 : \text{given},$$

に従って変化する。 $\epsilon_t$  はショックで、系列相関のない確率変数。また、関数  $f(k_t)$  は  $f'(k_t) > 0$ ,  $f''(k_t) < 0$  かつ稲田条件を満たす。人口成長はなく、資本減耗率は  $\delta \in [0, 1]$  で一定とする。このとき一人あたり資本ストックは

$$k_{t+1} = A_t f(k_t) - c_t + (1 - \delta)k_t, \quad k_0 > 0 : \text{given},$$

に従って変化する。Social planner は以下の家計の目的関数を最大化することを目的とする。但し、felicity  $v(c_t)$  は  $v'(c_t) > 0$ ,  $v''(c_t) < 0$  および稲田条件を満たす。

$$E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t v(c_t)$$

1. 変数  $k_t, c_t, A_t$  のうち、どれが state variable でどれが control variable かのべよ。また、内生的 state variable と外生的 state variable の違いについてもべよ。
2. これらの変数を用いて Social Planner's Problem を Bellman equation を用いて定式化せよ。但し今期の変数を  $k, c, A$  とするとき、次期の変数を  $k', c', A'$  と記して良い。
3. 上記の Bellman Equation の First order condition (f.o.c.) および Benveniste Scheinkman condition (BS) を導出せよ。
4. BS 条件の一つと f.o.c. を用いて、value function を消去した一つの関係式 (Euler equation) を得よ。(ヒント: 今期の変数  $k, c, A$  と次期の変数を  $k', c', A'$  の違いに注意する)
5. 上で得られた Euler Equation を  $1 = \dots$  という形にすると、異時点間の限界変形率 (MRT) および異時点間の限界代替率 (MRS) という観点から解釈可能である。説明せよ。
6. これまでの方法だと、BS 条件がやや複雑な形となってしまう、計算・解釈上煩雑であった。そこで、control variable として次期の一人あたり資本ストック  $k'$  を直接選ぶというように問題を書き直そう。この場合の Bellman Equation を定式化せよ。
7. 上記の Bellman Equation の f.o.c. および BS 条件を示し、それらから value function を消去して Euler equation を導出せよ。

(裏面へ続く)

**問題 2.** 問題 1 において、TFP が  $A_t = \exp \theta_t$  で与えられており、 $\theta_t$  の law of motion が

$$\theta_{t+1} = \log 10 + 0.3\theta_t + 0.2\theta_{t-1} + \gamma\epsilon_{t+1},$$

であるとする。但し、 $\gamma \geq 0$  は定数、生産関数が  $f(k_t) = k_t^{0.5}$ , felicity が  $v(c_t) = -c_t^{-1}$ , 時間選好率が  $\beta = 0.9$ , 資本減耗率  $\delta = 0.2$  であり、 $\log$  は常用対数を表す。また、 $E[\epsilon_{t+1}] = 0$  である。

1.  $\theta_t$  の law of motion を SLDE として行列形式で表せ。 $\theta_t$  が定常分布に従っている時の平均  $\bar{\theta}$  を求めよ。
2. この問題の Euler equation を導きなさい。
3. 仮に  $\gamma = 0$  とすると、この social planner's problem は不確実性を含まない問題となる。このとき、Euler equation および用いて資本  $k_t$  の定常値  $\bar{k}$  を求めよ。さらに law of motion の式を用いて、 $\gamma = 0$  の時の消費  $c_t$  の定常値  $\bar{c}$  を求めなさい。
4. 実際には  $\gamma = 1$  であるとする。この経済の state のすべての state 変数の law of motion を定常値  $\bar{\theta}, \bar{k}, \bar{c}$  の周りで一階近似し、 $\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_t + \mathbf{B}\mathbf{u}_t + \mathbf{C}\epsilon_{t+1}$  という形で表せ。但し、state vector  $\mathbf{x}_t$ , control vector  $\mathbf{u}_t$  の定義を示し、matrix  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$  の内容を数値で示すこと。(ヒント: state vector  $\mathbf{x}_t$  は定数 1 を含んだ形とせよ)
5. felicity function を定常値の周りで 2 階近似し、state vector, control vector, および行列を用いた 2 次形式で表せ。(ヒント: control vector は定数を含むことが出来ない。従って felicity function を表すには state vector, control vector の両方が必要)

**問題 3.** テキスト章末問題 Exercise 3.1 を解きなさい (既存の回答例をみるのではなく、自分で解くこと)