2005年度　マクロ経済学II(上級マクロ経済学)　期末試験

2006年2月7日(火)　9:30から12:00まで

受験上の注意

- まずすべての解答用紙に**登録科目名・専攻・学年・学籍番号・氏名**を記入してください。
- 電卓の使用を許可しますが、主要な導出過程を明記してください。解が小数となる場合は、**有効数字3桁**でよい(その次の桁を四捨五入すること)
- 問題は全部で**4問**あります。すべての問題に解答してください。
- 解答用紙が不足した際は追加の解答用紙を配りますので、着席したまま挙手をしてください。また、問題文に疑問点がある場合、気分が悪くなった場合なども同様に挙手してください。
- 解答用紙を提出する前に、解答用紙を何枚使い(合計n枚)、その何枚目か(x枚目)を各解答用紙右上の計__枚と記載されている部分にx/nと言う形式で記入してください(例: 3枚用いた場合は1/3, 2/3, 3/3と記入)。また、解答用紙は外側から1枚目、2枚目…と中に折り込んでまとめて提出してください。
- 10:00以降は答案を提出して退室することができます。解答用紙を教壇まで静かに持参してください。但し、試験終了時まで再入場できません。
- 学生証、筆記用具、電卓以外の物品は鞄に収納して隣の座席や机の下ではなく、**足下**に置いてください。携帯電話など記憶・通信機能のある機器の使用は禁止します。

問題 1. 生産･資本蓄積･不確実性がある経済における Recursive competitive equilibrium を考える。今期の消費、労働時間が c, n で与えられるとき、今期の代表的消費者の効用は

$$\log c - \frac{1}{2(1-n)^2}$$

とする。消費者は無限期生き、期待効用の合計を最大化する。但し、t 期後の効用は $(0.8)^t$ で割り引かれる。生産企業 (type I firm) は k^I の資本と n^I の労働を用いて

$$As\left[\frac{1}{k^I}+\frac{1}{n^I}\right]^{-1}$$

の最終財を生産する。但し、A, s は前期の TFP、今期の TFP 成長率であり、s の次期の値 s' は遷移確率 $\pi(s'|s)$ に従う。リース企業 (type II firm) は今期の最終財 $k^{II'}$ 単位から次期に利用可能な資本を $k^{II'}$ 単位生産する。一期間利用された資本は δ の割合だけ減耗する。また、各主体は Aggregate capital stock K のダイナミクス $K' = G(K, A, s) \equiv G(\mathbf{X})$ の予想を所与として行動する。但し、$\mathbf{X} \equiv [A, K, s]$ であり、$\mathbf{X}$ の予想される transition probability を $\widehat{\Pi}(\mathbf{X}'|\mathbf{X})$ と記して良い。

1. 消費者・生産企業・リース企業の 3 タイプの主体はどのような市場を通じてどのようなものをやりとりするのか、適当な図を用いて説明せよ。また、各市場における取引価格の定義を示せ。

2. 消費者の今期の資産保有量を a, 次期に aggregate state $\mathbf{X}'$ が実現した場合の資産保有量を $\overline{a}(\mathbf{X}')$ としよう。1. で定義した取引価格を用い、家計の最適化問題を Bellman equation の形で定式化せよ。

3. F.o.c. と予算制約式と Benveniste-Scheinkman condition を用いて optimal policy $n = n^*(a, \mathbf{X})$, $\overline{a}(\mathbf{X}') = a^*(a, \mathbf{X}; \mathbf{X}')$ 及び最適消費量 $c = c^*(a, \mathbf{X})$ が満たすべき 3 本の連立関数方程式を導け。

4. 生産企業およびリース会社の利潤最大化・参入条件を導け。

5. 均衡条件を用いて、消費者の貯蓄 (Arrow security の購入総額) が投資 (次期の capital stock) と等しくなることを示せ。

6. 均衡経路上 (on-path) においては $c^*(a, \mathbf{X})$, $n^*(a, \mathbf{X})$ が $\mathbf{X}$ のみに依存することを示せ。その上で、これらを $\overline{c}^*(\mathbf{X})$, $\overline{n}^*(\mathbf{X})$ と書ける事を用いて、各主体の期待 $K' = G(\mathbf{X})$ が合理的であるための条件を導出せよ。

(次ページへ続く)

問題 2. 次の一般的な確率的動的最適化問題を考えよう。

$$V(\mathbf{x}_0) = \mathbf{E}_0 \max_{\{\mathbf{x}_t, \mathbf{u}_t\}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t r(\mathbf{x}_t, \mathbf{u}_t) \tag{1}$$

$$\text{subject to } \mathbf{x}_{t+1} = g(\mathbf{x}_t, \mathbf{u}_t, \epsilon_{t+1}), \tag{2}$$

$\mathbf{x}_t$, $\mathbf{u}_t$, ϵ_t はそれぞれ state vector、control vector、shock vector で、$\mathbf{x}_0$ は所与とする。簡単のため state vector $\mathbf{x}_t$ の第 1 要素は定数、残りの要素は変数で

$$\mathbf{x}_t = \begin{bmatrix} 1 \\ \widetilde{\mathbf{x}}_t \end{bmatrix}, \tag{3}$$

と書けるとする。Shock vector ϵ_t は平均ゼロの i.i.d. 確率変数で $\mathbf{E}\epsilon_t\epsilon_t' = \mathbf{I}$ を満たす。但し、ϵ_t' は ϵ_t の転置ベクトルを表し (以下同様)、$\mathbf{I}$ は単位行列である。この問題を線形化して解く方法について考えよう。

1. 線形近似をするためには、近似の中心となる点 $\overline{\mathbf{x}}$, $\overline{\mathbf{u}}$ を決める必要がある。良い近似を得るためにこれらをどのように選べばよいか、方法を具体的に説明せよ。

2. State vector の law of motion (2) を線形化して近似的に $\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_t + \mathbf{B}\mathbf{u}_t + \mathbf{C}\epsilon_{t+1}$ という形で表したい。Matrix $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ の内容を関数 $g(\cdot)$ および $\overline{\mathbf{x}}$, $\overline{\mathbf{u}}$ を用いて表せ。

3. 各期の payoff 関数 $r(\mathbf{x}_t, \mathbf{u}_t)$ も二次近似されて

$$-(\mathbf{x}_t'\mathbf{R}\mathbf{x}_t + \mathbf{u}_t'\mathbf{Q}\mathbf{u}_t + \mathbf{x}_t'\mathbf{W}\mathbf{u}_t + \mathbf{u}_t'\mathbf{W}'\mathbf{x}_t) \tag{4}$$

   と言う形で書けたとしよう。Value function を $-\mathbf{x_t'}\mathbf{P}\mathbf{x_t} - d$ と予想して、行列 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{R}, \mathbf{Q}, \mathbf{W}$ を用いて線形化された問題の Bellman equation を作成せよ。ただし、Bellman equation の右辺に law of motion を代入し、さらに公式 $tr(\mathbf{AB}) = tr(\mathbf{BA})$ for any $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ および shock vector の性質を用いて可能な限り整理すること。

4. 一階条件を用いて optimal policy function $\mathbf{u_t} = -\mathbf{F}\mathbf{x_t}$ における行列 $\mathbf{F}$ を導出せよ。(行列 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{R}, \mathbf{Q}, \mathbf{W}, \mathbf{P}$ を用いてよい)

5. 行列 $\mathbf{P}$ および定数 d を決定する方程式を導出せよ。

(次ページへ続く)

問題 3. 次のような Cake Eating Problem を考えよう。第 0 期に $W_0 = 1$ の大きさの資産を保有しており、第 2 期までの間に消費することが可能である。第 t 期の消費量を c_t とすると、資産 W_t は

$$W_{t+1} = 0.9(W_t - c_t),\ W_3 \geq 0 \tag{5}$$

に従って変化する。各期の効用は $\theta_t \ln c_t$ で表される。但し、θ_t は消費者の嗜好 (消費をしたい気分) を示す変数である。消費者の割引率は 0 で、生涯期待効用

$$V_0(W_0, \theta_0) = \mathbf{E}_0 \left[\sum_{t=0}^{2} \theta_t \log c_t \right] \tag{6}$$

を最大化する。なお、簡単のため $0 \log 0 = 0$ として良い。

以下の小問 1.,2. では θ_t は確率変数ではなく、常に定数 1 であるとする。

1. 第 1 期の問題を Bellman Equation を用いて表し、value function $V_1(W_1)$, および policy function $c_1 = h_1(W_1)$ を求めよ。
2. 1. の結果を用いて、最適な資産保有量の経路 $\{W_t\}_{t=0}^2$ および消費量の経路 $\{c_t\}_{t=0}^2$ を求めよ。

以下では θ_t が確率変数で、0 か 1 かのいずれかの値を取り、discrete Markov Process によって外生的に変化する場合を考える。θ_t の Transition Matrix は

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}, \tag{7}$$

初期値は $\theta_0 = 1$ とする。

3. この場合、state 変数は (W_t, θ_t) のペアで表せる。第 1 期の問題を Bellman Equation を用いて表し、value function $V_1(W_1, \theta_1)$, および policy function $c_1 = h_1(W_1, \theta_1)$ を求めよ。ただし、解は

$$V_1(W_1, \theta_1) = \begin{cases} ... & \text{if } \theta_1 = 0 \\ ... & \text{if } \theta_1 = 1 \end{cases} \tag{8}$$

   と言う形式で記述し、W_1 以外の部分については数値解を求めること。

4. State (W_t, θ_t) の取りうるヒストリーをすべてあげ tree を用いて図示せよ。また、それぞれのヒストリーをたどる確率 (確率分布) を tree に記入せよ。(注意: 初期値 $W_0 = 1$, $\theta_0 = 1$ を用いること)
5. 結果的に $\theta_t = 1$ が $t = 0, 1, 2$ で実現した場合の消費の経路 $\{c_t\}_{t=0}^2$ を計算せよ。2. で求めた θ_t が確率変数ではない場合 ($\theta_t = 1$ は定数) の消費経路と図を用いて比較した上で、その差がなぜ生じたか簡単に説明せよ。また、結果的に得られた効用はこの 2 つの場合どちらが高いか述べよ。

(次ページへ続く)

問題 4. 人口 1 の代表的個人により構成される交換経済について考えよう。Endowment d_t の初期値は 1 で、その成長率 $s_t = d_t/d_{t-1}$ は 1 または 2 の値を取る。s_t は Markov Process に従い、その transition matrix は

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}, \tag{9}$$

その初期値は $s_0 = 2$ である。経済の history は $s^t \equiv (s_0, s_1, \ldots, s_t)$ で表せる。History s^t の時の endowment を $d_t(s^t)$、消費を $c_t(s^t)$ とするとき、個人の目的関数は

$$-\mathbf{E}_0 \sum_{t=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^t \frac{1}{c_t(s^t)}. \tag{10}$$

経済の feasibility は

$$d_t(s^t) = c_t(s^t) \text{ for all } t,\ s^t. \tag{11}$$

限界効用は常に正であるから財を余す可能性は考えなくて良い。この経済に関してまずは Time-0 trading が行われる市場での Arrow-Debreu 均衡を考えよう。

1. Arrow-Debreu security の価格を $q_t^0(s^t)$ とする。第 3 期のすべての可能な history s^3 に対し $q_3^0(s^3)$ の数値解を求め、tree 上に記入せよ。

2. ある $t \geq 1$ 時点で必ず 1 単位の財を受け取ることが出来るという claim (安全資産) の time-0 price を t の関数として求めよ。

外生 state 変数を (s_t, d_t) とすると、この経済は Markov 性を満たしている。以下では Sequential trading のもとでの均衡を考える。

3. この経済における Recursive competitive equilibrium(RCE) の定義を示し、均衡 pricing kernel を導出せよ。(d_t 以外の部分はできるだけ数値で答えること。s_t に関しては**問題 3** の小問 3 と同様場合分けの形で記述せよ。以下同様)

4. 任意の時点での消費者の Natural Debt Limit(NDL) を外生 state 変数 (s_t, d_t) の関数として導出せよ

5. 3.4. で求めた price system と NDL を given として最適化する消費者を考えよう。現在の s_t の値が 1 であったとしよう。d_t と現在の資産量 a_t (NDL を満たす) を given として、現在いくら消費をするのが最適か答えよ。

お疲れ様でした。以上でマクロ経済学 II を終わります。最後に専攻・学年・学籍番号・氏名および解答用紙の番号が記入されているかもう一度確認してください。