

## 2004年度 マクロ経済学 II(上級マクロ経済学) 期末試験

2005年2月9日(水) 13:00 から最大 16:10 まで

### 受験上の注意

- まずすべての解答用紙に登録科目名・専攻・学年・学籍番号・氏名を記入してください。
- 問題は5題あります。すべての問題に解答してください。
- 解答用紙が不足した際は追加の解答用紙を配りますので、着席したまま挙手をしてください。また、問題文に疑問点がある場合、気分が悪くなった場合なども同様に挙手してください。
- 解答用紙を提出する前に、解答用紙を何枚使ったかを所定の位置(右上の計\_\_枚と記載されている部分)に記入してください。また、解答用紙は外側から1枚目、2枚目...と中に折り込んでまとめて提出してください。
- 13:30以降は答案を提出して退室することができます。解答用紙を教壇まで静かに持参してください。但し、試験終了時まで再入場できません。
- 学生証、筆記用具、電卓以外の物品は鞆に収納して足下に置いてください。特に携帯電話など記憶・通信機能のある機器の使用は禁止します。

問題 1. Transition matrix が

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.3 & 0.1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

で与えられる Markov chain (discrete-state Markov process) を考える。以下の問いに答えよ。

1. この確率過程の invariant distribution を示せ。
2. initial distribution が  $\pi_0 = [0.2, 0.5, 0.3]'$  で与えられるとき、 $t$  期後の確率分布  $\pi_t$  を求めよ。

問題 2. 次の動的最適化問題を考えよう。

$$\max_{\{c_t, i_t\}} - \sum_{t=1}^{\infty} (0.9)^t \{(c_t - 30)^2 + i_t^2\} \quad (2)$$

$$\text{subject to } c_t + i_t = 0.1a_t + y_t, \quad (3)$$

$$a_{t+1} = a_t + i_t, \quad (4)$$

$$y_{t+1} = 1.2y_t - 0.3y_{t-1}. \quad (5)$$

$c_t, i_t, a_t, y_t$  はそれぞれ消費、貯蓄、資産、収入である。

1. State vector を  $\mathbf{x}_t = [1, a_t, y_t, y_{t-1}]'$ , control vector を  $\mathbf{u}_t = [i_t]$  と定義して、上の問題を以下の形に書き直すことができる。

$$\max_{\{\mathbf{u}_t\}} - \sum_{t=1}^{\infty} (0.9)^t \{\mathbf{x}_t' \mathbf{R} \mathbf{x}_t + \mathbf{u}_t' \mathbf{Q} \mathbf{u}_t + 2\mathbf{x}_t' \mathbf{W} \mathbf{u}_t\} \quad (6)$$

$$\text{subject to } \mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{A} \mathbf{x}_t + \mathbf{B} \mathbf{u}_t \quad (7)$$

Matrix  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{R}, \mathbf{Q}, \mathbf{W}$  を求めよ。但し  $\mathbf{R}, \mathbf{Q}$  は symmetric matrix である。

2.  $\mathbf{u}_t, \mathbf{R}, \mathbf{A}$  を定義し直すことによって、上の問題から交差項  $2\mathbf{x}_t' \mathbf{W} \mathbf{u}_t$  を

$$\max_{\{\mathbf{u}_t\}} - \sum_{t=1}^{\infty} (0.9)^t \{\mathbf{x}_t' \bar{\mathbf{R}} \mathbf{x}_t + \mathbf{u}_t^{*'} \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{u}_t^*\} \quad (8)$$

$$\text{subject to } \mathbf{x}_{t+1} = \bar{\mathbf{A}} \mathbf{x}_t + \mathbf{B} \mathbf{u}_t^* \quad (9)$$

の様に消去することができる。再定義された  $\mathbf{u}_t^*, \bar{\mathbf{R}}, \bar{\mathbf{A}}$  を  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{R}, \mathbf{Q}, \mathbf{W}, \mathbf{x}_t, \mathbf{u}_t$  を用いて表せ。(数値解を計算しなくとも良い)

3. Value function を  $-\mathbf{x}_t' \mathbf{P} \mathbf{x}_t$  とする。Matrix  $\bar{\mathbf{A}}, \mathbf{B}, \bar{\mathbf{R}}, \bar{\mathbf{Q}}$  を用いてこの問題の Bellman equation を作成せよ。さらに一階条件を用いて optimal policy function  $\mathbf{u}_t^* = -\mathbf{F}^* \mathbf{x}_t$  を導出せよ。
4. この問題の value function  $-\mathbf{x}_t' \mathbf{P} \mathbf{x}_t$  を value function iteration を用いて求めたい。P の guess  $\mathbf{P}_j$  が与えられたとき、新たな guess  $\mathbf{P}_{j+1}$  を導出せよ。

問題 3. 人口 1 の代表的個人により構成される交換経済について考えよう。Endowment  $d_t$  の成長率  $\lambda_t$  は次の Markov Process に従う。

$$\text{Prob}[\lambda_{t+1} = \bar{\lambda}_j | \lambda_t = \bar{\lambda}_i] = P_{ij}, \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix} \quad (10)$$

ただし、 $\bar{\lambda}_1 = 0.99$ ,  $\bar{\lambda}_2 = 1.02$ . また、 $\lambda_t$  の初期値は  $\lambda_0 = 1.02$  である。経済の history は  $\lambda^t \equiv (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_t)$  で表せる。History  $\lambda^t$  の時の endowment  $d_t(\lambda^t)$  は

$$d_{t+1}(\lambda^{t+1}) = \lambda_{t+1} d_t(\lambda^t), d_0(\lambda^0) = 1, \quad (11)$$

に従う。History  $\lambda^t$  の時の消費を  $c_t(\lambda^t)$  とするとき、個人の目的関数は

$$-(1/2)E_0 \sum_{t=0}^{\infty} (0.98)^t [c_t(\lambda^t)]^{-2}. \quad (12)$$

経済の feasibility は

$$d_t(\lambda^t) = c_t(\lambda^t) \text{ for all } t, \lambda^t. \quad (13)$$

(財を余す可能性は考えなくて良い。) この経済の Arrow-Debreu equilibrium (ADE) に関して以下の問いに答えよ。

1. Arrow-Debreu security の価格を  $q_t^0(\lambda^t)$  とする。Arrow-Debreu security とは何か定義を示し、具体的にどのような取引がなされるのか簡潔に説明せよ。
2. 任意の history  $\lambda^t$  に対して  $q_t^0(\lambda^t)$  を求めよ。 ( $\pi_t(\lambda^t)$  を用いて良い)。
3. History  $\tilde{\lambda}^2 = (\tilde{\lambda}_0, \tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2) = (1.02, 0.99, 0.99)$  に対応する Arrow-Debreu security price  $q_2^0(\tilde{\lambda}^2)$  の数値解を求めよ。
4.  $t = 1$  時点で必ず 1 単位の財を受け取ることが出来るという claim (安全資産) の time-0 price の数値解を求めよ。

問題 4. 生産・資本蓄積・不確実性があり、Markov property を満たす経済において、以下の central planner problem (CPP) を考える。Aggregate state vector を  $\mathbf{X} \equiv [K, A, s]$  としたとき、Bellman equation は

$$v(\mathbf{X}) = \max_{C, N, K'} \left\{ u[C, 1 - N] + \beta \sum_{s'} \pi(s'|s) v(\mathbf{X}') \right\} \quad (14)$$

$$\text{subject to } K' + C = AsF(K, N) + (1 - \delta)K \quad (15)$$

$$A' = As \quad (16)$$

ただし、 $K, A, s, C, N$  はそれぞれ資本ストック、前期の TFP、TFP 成長率、消費、労働供給である。 $\pi(s'|s)$  は遷移確率、 $F(K, N)$  は一次同次の生産関数、 $\delta \in (0, 1)$  は資本減耗率。また  $K'$  は次期の  $K$  の値を示す (他の変数も同様)。以下に従って optimal policy function  $C = C^*(X)$ ,  $N = N^*(X)$ ,  $K' = K^*(X)$  を求める方法を考えよう。

1. 毎期の消費および労働供給が optimal policy に従うとき、state vector  $\mathbf{X}$  の確率過程は Markov process となることを示せ。

2. 以下  $X$  の遷移確率を  $\Pi(X'|X)$  と表そう。Bellman equation より optimal policy  $C^*(X)$ ,  $N^*(X)$  が満たすべき 2 つの一階条件を導け。
3.  $C^*(X)$ ,  $N^*(X)$ ,  $K^*(X)$  のみを未知数として持つ 3 本の連立方程式を導け。(ヒント: Benveniste-Scheinkman condition を用いて一階条件から value function を消去することが出来る)

問題 5. Distortion のある経済での recursive competitive equilibrium (RCE) を考えよう。経済には人口 1 の同質的な消費者が存在し、それぞれの目的関数は

$$\mathbf{E}_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t, 1 - h_t) \quad (17)$$

で表される。ただし、 $c_t$ ,  $h_t$  は個人の消費および労働供給である。彼らの予算制約は

$$c_t + i_t = (1 - \tau_h)w_t h_t + r_t k_t - \tau_k(r_t - \delta)k_t + TR_t, \quad (18)$$

$$k_{t+1} = (1 - \delta)k_t + i_t. \quad (19)$$

$i_t, k_t, w_t, r_t, \tau_k, \tau_h$  はそれぞれ個人の投資、個人が保有する資本ストック、賃金率、資本のレンタル料、資本課税率、労働課税率である。また、 $TR_t$  は政府からの lump-sum transfer で、政府は各期の財政が均衡するよう、すべての税収を一括で消費者に等しく分配する。

また、この経済の生産サイドは完全競争で、生産関数は

$$y_t = z_t F(k_t^f, h_t^f), \quad (20)$$

$$z_{t+1} = A(z_t) + \epsilon_{t+1} \quad (21)$$

であたえられる。ただし、 $k_t^f, h_t^f$  は企業の資本および労働投入、 $z_t$  は TFP、 $\epsilon_t$  は i.i.d. 確率変数。 $F(k_t^f, h_t^f)$  は一次同次関数、 $A(z_t)$  は  $z_t$  の線形関数である。以下の問いに答えよ。

1.  $k_t, h_t, i_t$  をすべての個人について集計した aggregate variables をそれぞれ  $K_t, H_t, I_t$  としよう。企業の一階条件、要素市場の均衡式、政府の予算制約を用いて各期の個人消費  $c_t$  を  $z_t, K_t, H_t, k_t, h_t, i_t$  の関数として表せ (注意: この段階で効用最大化を解く必要はない)。
2. 以下 time script を省略して良い。ただし次期の変数には  $K'$  のように prime をつけること。1. より個人の各期の効用が  $r(z, K, H, k, h, i)$  として表せることが解った。つまり、個人の効用は他の agent の平均的な decision に依存する。個人が aggregate state variables ( $z, K$ ) と aggregate decision variables ( $I, H$ ) の間に成立すると期待している関係を  $I = \bar{I}(z, K)$ ,  $H = \bar{H}(z, K)$  で表すことにしよう。RCE の定義を変数  $z, K, H, k, h, i$  を用いて示し、 $\bar{I}(z, K)$ ,  $\bar{H}(z, K)$  がどのように決定されるか説明せよ。

お疲れ様でした。以上でマクロ経済学 II を終わります。最後に専攻・学年・学籍番号・氏名および解答用紙の番号が記入されているかももう一度確認してください。