2003年度　マクロ経済学Ｉ (上級マクロ経済学)　前期末試験

上級マクロ経済学・マクロ経済学 I
経済学特殊講義（マクロ経済学 I ）・マクロ経済学特殊研究 I
経済学特殊研究（マクロ経済学 I ）共通問題

2003年9月9日 (火)　13:00〜16:10

受験上の注意

- まずすべての解答用紙に登録科目名・専攻・学年・学籍番号・氏名を記入してください。
- 解答用紙が不足した際は追加の解答用紙を配りますので、着席したまま挙手をしてください。また、問題文に疑問点がある場合、気分が悪くなった場合なども同様に挙手してください。
- 問題は4題あります。採点は結果だけでなく導出過程・根拠が示されていることを重視します。半年間勉強したことを総動員してチャレンジしてください。
- 解答用紙を提出する前に、解答用紙を何枚使ったかを所定の位置 (右上の計 __ 枚と記載されている部分) に記入してください。また、解答用紙は外側から1枚目、2枚目…と中に折り込んでまとめて提出してください。
- 3限終了後 (14:30以降) は答案を提出して退室することができます。解答用紙を教壇まで静かに持参してください。但し、試験終了時まで再入場できません。

問題 1

$y_1(t), y_2(t)$ についての連立微分方程式

$$\dot{y}_1(t) = y_1(t) + 4y_2(t) - 9, \quad \dot{y}_2(t) = 2y_1(t) + 3y_2(t) - 8 \tag{1}$$

を考える。このとき、以下の手順で解析解（Analytical solution）を求めよ。

1. 連立微分方程式 (1) を行列形式で表現せよ。さらに変数変換を行って定数項を消去し、
$$\dot{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}) \tag{2}$$
という形式に書き換えよ。（$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}), \boldsymbol{A}$ の定義を示すこと）ただし、$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})$ は 2x1 の列ベクトル、$\boldsymbol{A}$ は 2x2 の定数行列である。

2. 行列 $\boldsymbol{A}$ を対角化し、固有値・固有ベクトルを求めよ。この結果から安定性を確認せよ。さらに、微分方程式 (1) の unstable arm および stable arm を図示せよ。（傾きや切片、および軸上での収束・発散速度を示すこと）

3. 微分方程式 (1) の解析解を初期条件を $y_1(0) = a, y_2(0) = b$ として求めよ。

4. $y_1(0) = 5$ は固定して、$y_2(0)$ =-0.1, 0, および 0.1 の 3 通りの場合を考える。それぞれの場合について $y_1(t), y_2(t)$ の経路の概形を位相図上に図示せよ。（3 つの経路を同じ図上に重ねて書いて良い。）

問題 2

標準的な設定 (授業およびテキストで説明した設定) の Ramsey Problem の経済において、一般に厚生経済学の第 1 命題、第 2 命題 (基本定理) が成立することを証明せよ。

ヒント: まず Central Planner の最大化問題を明示的に定式化し、最大化条件を導出する。そこから、最適経路を一意に特徴づける。次に各主体の最大化問題を明示的に定式化する。（以下各自考えよ）

問題 3

Ramsey Problem について以下の応用を考えよう。瞬時効用関数は CARA 型で $u(c) = -(1/\beta)\exp(-\beta c)$、生産関数が $Y_t = AK_t^{\alpha}L_t^{1-\alpha}$ で与えられているとする。$A > 0$ は全要素生産性 (TFP) と呼ばれる定数である。時間選好率は θ、人口成長率は n、資本減耗は無いものとする。TFP は自然状況など外性的な要因によって変動することが知られている。そこで、TFP が変動した際に一人あたり資本 k_t および消費 c_t がどのように調整されるか動学的に分析しよう。

経済は初期時点 (時点 0) において定常状態にあり、初期の TFP は A_0 であるとする。その後 TFP が以下のような 3 つのパターンで変化するとしたとき、(k_t, c_t) の $t = 0$ から $t = \infty$ までの最適経路 (command optimum の path) をそれぞれの場合について位相図上に図示せよ。必要であれば場合分けを行うこと。図はわかりやすいように十分な大きさで描き、経路の各部分において (k_t, c_t) がどのような微分方程式によって動くかを明示し、また、その端点 (時刻および位置) はどのように決まっているかを説明すること。

さらに、それぞれの場合について、k_t および c_t の時間変化の概形を、縦軸に k_t, c_t 横軸に t をとったグラフで示せ。ただし、$0 < t_0 < t_1 < t_2 < \infty$ とする。

1. 時点 t_1 に A が突然 (予期されず) かつ恒久的に A_0 から A_1 へ下落した場合。

2. 時点 t_0 において、「時点 t_1 に A が A_0 から A_1 にへ恒久的に下落する」ことが予期出来た場合。

3. 時点 t_1 に A が突然 (予期されず) A_0 から A_1 へ下落するが、時点 t_2 に A は元に戻ることが解っている場合。

問題 4

消費者が利他性を持ち、遺産を残すことが出来る世代重複モデルを考える。各個人は２期間生き、各世代の人口は n の率で成長する。t 期に生まれた $t \geq 0$ 世代の消費者の効用 U_t は以下で表されるものとする。

$$U_t = \frac{c_{1,t}^{1-\gamma}}{1-\gamma} + \frac{1}{1+\theta}\frac{c_{2,t+1}^{1-\gamma}}{1-\gamma} + \frac{1}{1+R}U_{t+1} \tag{3}$$

で表される。ここで $c_{1,t}, c_{2,t+1}$ はそれぞれ t 世代の若年期・老年期における一人あたり消費量である。個人は若年期に親からの遺産を受け取り (これを b_t とする)、１単位の労働を労働市場に非弾力的に提供する。また、老年期には自分の子世代に非負の遺産を残すことが出来る。経済全体の資本量、労働投入量がそれぞれ K_t,N_t のとき（資本減耗を考慮した正味の）生産関数は

$$Y_t = AK_t^{\alpha}N_t^{1-\alpha} - \delta K_t \tag{4}$$

と表される。 但し $0 < \alpha < 1$, $0 < \delta < 1$, および $A > 0$ は定数とする。また、各期の賃金・利子率をそれぞれ w_t,r_t と表す。

1. (3) 式中の θ と R の違いについて述べよ。さらに、U_t を t 世代以降の消費の流列の関数として表せ。(U_{t+1} を用いないで表す）また、価格を所与としたときに、各世代の２期間を通じた予算制約式を導出せよ。

2. クーンタッカー法を用いて、消費および遺産量に関する一階条件および相補性条件を求めよ。ラグランジュ乗数を導入する際は、それぞれが何を意味するかを述べること。

3. 上記で得られたそれぞれの条件からラグランジュ乗数を消去・整理して、限界代替率および限界変形率（あるいは価格比）の観点からこれらの条件の意味を直観的に説明せよ。

4. 仮に遺産の非負条件が binding で無かったして、市場均衡の定常状態における一人あたり資本量 k^* を求めよ。解は効用関数および生産関数のパラメータを用いて示すこと。

5. 同様の仮定の下で上記の k^* を用いて定常状態における young,old の消費 c_1^*, c_2^* を求めよ。さらにその結果を用いて定常状態における遺産量 b^* を求めよ。

6. 上記の２問は、遺産の非負条件が binding で無かったらという仮定の話である。そもそもこの仮定が正しかったのかどうか、以上の手続きで知ることが出来るか? もし、仮定が正しくないことが解った場合、定常状態における資本量・消費量はどのようにして求めればよいか? それぞれ説明せよ。