マクロ経済学 II (上級マクロ経済学後期)　宿題第 5 回

レポートの第 1 枚目上部に専攻・学年・学籍番号・氏名を記入してください。電卓を使用しても良いが、主要な導出過程を明記すること。解が小数となる場合は、有効数字 3 桁でよい (その次の桁を四捨五入すること) 問題に訂正・補足等があるときは、経済学研究科の web の掲示板 (大学院生の部屋) で告知します。

問題 1. 動的な最適化問題を Linear-Quadratic 近似すると、一般的に目的関数は

$$r(\mathbf{x}_t, \mathbf{u}_t) = -\begin{bmatrix}\mathbf{x}_t' & \mathbf{u}_t'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{R} & \mathbf{W}\\ \mathbf{W}' & \mathbf{Q}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}_t\\ \mathbf{u}_t\end{bmatrix}$$

というように近似できる。但し、$\mathbf{x}_t, \mathbf{u}_t$ はそれぞれ state variables, control variables を表すベクトルで、$\mathbf{x}_t', \mathbf{u}_t'$ はそれらの転置ベクトルを表す。

授業ではベクトル $\mathbf{u}_t$ を再定義すれば $\mathbf{W}$ を消去できると説明したが、その方法は P.1020-1021 の Section B.3 の通りである。一方、あえて $\mathbf{W}$ を消去せずに、そのまま Bellman Equation を作製し、その一階条件から Ricatti Equation を導出する方法もある。それについては P.1017-1019 の Section B.2 に説明されている。

同じ問題であるので、当然出てきた答えは一致するはずである。SectionB.2, B.3 の内容を読み、P.1021 にある a. から d. までの命題を確認せよ。

問題 2. 次の動的最適化問題を考えよう。

$$\max_{\{c_t, i_t\}} -\sum_{t=1}^{\infty}(0.9)^t\left\{(50-c_t)^2 + i_t^2\right\} \tag{1}$$

$$\text{subject to } c_t + i_t = 0.2a_t + y_t, \tag{2}$$

$$a_{t+1} = a_t + i_t, \tag{3}$$

$$y_{t+1} = 5 + 0.7y_t - 0.2y_{t-1}. \tag{4}$$

c_t, i_t, a_t, y_t はそれぞれ消費量、投資量、資産ストック、収入である。

1. State vector を $\mathbf{x}_t = [1, a_t, y_t, y_{t-1}]'$, control vector を $\mathbf{u}_t = [i_t]$ と定義して、上の問題を以下の形に書き直すことが出来る。

$$\max_{\{\mathbf{u}_t\}} -\sum_{t=1}^{\infty}(0.9)^t\left\{\mathbf{x}_t'\mathbf{R}\mathbf{x}_t + \mathbf{u}_t'\mathbf{Q}\mathbf{u}_t + 2\mathbf{x}_t'\mathbf{W}\mathbf{u}_t\right\} \tag{5}$$

$$\text{subject to } \mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_t + \mathbf{B}\mathbf{u}_t \tag{6}$$

   Matrix $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{R}, \mathbf{Q}, \mathbf{W}$ を求めよ。但し $\mathbf{R}, \mathbf{Q}$ は symmetric matrix である。

2. $\mathbf{u_t}, \mathbf{R}, \mathbf{A}$ を定義し直すことによって、上の問題から交差項 $2\mathbf{x}_t'\mathbf{W}\mathbf{u}_t$ を

$$\max_{\{\mathbf{u}_t\}} -\sum_{t=1}^{\infty}(0.9)^t\left\{\mathbf{x}_t'\overline{\mathbf{R}}\mathbf{x}_t + {\mathbf{u}^*}_t'\mathbf{Q}\mathbf{u}_t^*\right\} \tag{7}$$

$$\text{subject to } \mathbf{x}_{t+1} = \overline{\mathbf{A}}\mathbf{x}_t + \mathbf{B}\mathbf{u}_t^* \tag{8}$$

   の様に消去することが出来る。$\mathbf{u_t^*}, \overline{\mathbf{R}}, \overline{\mathbf{A}}$ を求めよ。

3. Value function を $-\mathbf{x_t'Px_t}$ として上記の問題の Bellman equation を作成せよ。さらに一階条件を用いて optimal policy function $\mathbf{u_t^*} = -\mathbf{F}^*\mathbf{x_t}$ における行列 $\mathbf{F}^*$ を導出せよ（行列 $\mathbf{P}$ はこの時点では未知なのでその i,j 成分を $P_{i,j}$ と記して良い)。

4. この問題の value function $-\mathbf{x_t'Px_t}$ を value function iteration を用いて求めたい。$\mathbf{P}$ の最初の guess を $\mathbf{P}_0 = \mathbf{O}$ (ゼロ行列) として新たな guess $\mathbf{P}_1$ を導出せよ。同様に $\mathbf{P}_1$ から $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_2$ から $\mathbf{P}_3$ を導出せよ

5. 収入に不確実性が導入された場合を考えよう。(4) 式が

$$y_{t+1} = 5 + 0.7y_t - 0.2y_{t-1} + 0.5\epsilon_{t+1} \tag{9}$$

と変更されたとする。但し、ϵ_t は系列相関のない標準正規分布に従う確率変数とする。このとき、最大化された期待効用は不確実性によっていくら変化するか計算せよ。(行列 $\mathbf{P}$ の各成分の値が必要な場合近似的に $\mathbf{P}_3$ を用いるか、上の問題が出来なかった場合は $\mathbf{P}$ の i,j 成分を $P_{i,j}$ と記して良い)

6. 収入が (9) に従うとき、各期の最適消費量が Markov Process に従うことを linear state-space system の形で示せ（P.41 参照; また、行列 $\mathbf{P}$ に関しては上記と同様の取り扱いでよい)。