

## マクロ経済学 II (上級マクロ経済学後期) 宿題第 3 回

レポートの第 1 枚目上部に専攻・学年・学籍番号・氏名を記入してください。電卓を使用しても良いが、主要な導出過程を明記すること。解が小数となる場合は、有効数字 3 桁でよい(その次の桁を四捨五入すること)

問題 1. 次のような Cake Eating Problem を考えよう。第 0 期に  $W_0$  の大きさの資産 (cake) を保有しており、第  $T$  期までの間に消費することが可能である。第  $t$  期の消費量を  $c_t$  とすると、その期の効用は  $u(c_t) = \ln c_t$  で表される。資産は

$$W_{t+1} = W_t - c_t, W_{T+1} \geq 0 \quad (1)$$

に従って変化する。消費者は、discount factor を  $\beta$  として、

$$V_0(W_0) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \quad (2)$$

を最大化する。

1. 第  $T$  期の Value function  $V_T(W_T)$  と policy function  $c_T = h_T(W_T)$  を求めよ。
2. 第  $T-1$  期の問題を Bellman Equation を用いて表し、 $V_{T-1}(W_{T-1})$ ,  $h_{T-1}(W_{T-1})$  を求めよ。
3. 同様に  $V_{T-2}(W_{T-2})$ ,  $h_{T-2}(W_{T-2})$  を求めよ。
4. これまでの問題の解を参考に、任意の  $s \in \{0, 1, \dots, T\}$  に対して一般に  $T-s$  期における value function  $V_{T-s}(W_{T-s})$  の関数形を予想せよ。それを  $T-s$  期の Bellman Equation に代入して正しいことを確かめなさい。
5. 上記の問題の極限を取って、 $T = \infty$  の無限期間の問題の場合 Value function  $V(W)$  と Policy function  $h(W)$  を求めなさい。それを Recursive な Bellman Equation に代入して正しいことを確認せよ。
6.  $W_0 = 1, T = 5, \beta = 0.9$  として、 $c_t$  の  $t \in \{0, 1, \dots, 5\}$  における経路を求めなさい。
7.  $W_0 = 1, T = \infty, \beta = 0.9$  として、 $c_t$  の  $t \in \{0, 1, \dots, 5\}$  における経路を求めなさい。上の問題とどのように異なるか時間経路を図示して説明せよ。

(裏面へ続く)

問題 2. 問題 1 において、資産の収益率が不確実な場合を考えよう。資産は

$$W_{t+1} = r_{t+1}(W_t - c_t), W_{T+1} \geq 0, W_0 = 1 \quad (3)$$

に従って変化する。利子率  $r_t$  は 1 か 2 かいずれかの値を取り、discrete Markov Process によって外生的に変化する。 $r_t$  の Transition Matrix は

$$P = \begin{matrix} & \text{"} & \text{\#} \\ \begin{matrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.1 & 0.9 \end{matrix} & & \end{matrix} \quad (4)$$

とする。消費者は、discount factor を  $\beta$  として、生涯期待効用

$$V_0(W_0, r_0) = E \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ln(c_t) \quad (5)$$

を最大化する。

1. 第  $T-1$  期の問題を Bellman Equation を用いて表し、 $V_{T-1}(W_{T-1}, r_{T-1})$ ,  $h_{T-1}(W_{T-1}, r_{T-1})$  を求めよ。
2. 同様に  $V_{T-2}(W_{T-2}, r_{T-2})$ ,  $h_{T-2}(W_{T-2}, r_{T-2})$  を求めよ。
3.  $T = 2$ ,  $r_0 = 1$ ,  $\beta = 0.9$  とするとき、 $(W_t, r_t)$  の取りうるヒストリーをすべてあげ、それぞれのヒストリーをたどる確率 (確率分布) を求めよ。また、 $E[c_t]$  の経路も計算せよ。
4.  $T = 2$ ,  $\beta = 0.9$  とするとき第 0 期の  $r_0$  が 1 の場合 (ゼロ金利) と 2 の場合 (正の収益率) で、消費者の生涯期待効用はどれだけ変わるか計算せよ。
5. (以下発展問題)  $T = \infty$  の無限期間の問題の場合を考えよう。Policy function  $h(W, r)$  がどうなるか予想せよ (ヒント: 問題 1 を参考にせよ)。任意の  $(W, r)$  からスタートして、その予想された Policy function にずっと従った場合の Value function  $V(W, r)$  の値を計算せよ。それを Recursive な Bellman Equation に代入して正しいことを確認せよ。(正しくない場合は予想が間違っているので、別の予想を試す)
6. 消費  $c_t$  の成長率は  $g_{t+1} = (c_{t+1} - c_t)/c_t$  と定義される。 $T = \infty$  のとき長期の成長率  $\lim_{t \rightarrow \infty} E[g_t]$  がどうなるか調べよ。