マクロ経済II第九回宿題解答[†]

TA：荒渡良[‡]

問題1

Central Planner's Problem (CPP).

- 消費者の瞬時効用関数 (felicity function)

$$u(C, 1-N) = \frac{C^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma} + \log(1-N). \tag{1}$$

- 資本蓄積式

$$K' + C = AsK^{\alpha}N^{1-\alpha} + (1-\delta)K. \tag{2}$$

- 今期の TFP の成長率 s の遷移確率

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{hh} & p_{hl} \\ p_{lh} & p_{ll} \end{bmatrix}. \tag{3}$$

  各遷移確率を $p_{ji} = \pi(s' = s_j | s = s_i)$, $(i, j = h, l)$ で表すことにする。

- Aggregate state vector, $\mathbf{X} \equiv [K, A, s]$.

(問題 1-1)

次期の Aggregate state $\mathbf{X}' = [K', A', s']$ の各要素がどのように遷移していくかを見ていくと、

- 毎期の消費と労働供給が optimal policy $C = C^*(\mathbf{X})$, $N = N^*(\mathbf{X})$ に従うとき、次期の資本量についての optimal policy (K の law of motion) は、資源制約式より

$$K' = AsK^{\alpha}N^*(\mathbf{X})^{1-\alpha} + (1-\delta)K - C^*(\mathbf{X}) \equiv K^*(\mathbf{X}), \tag{4}$$

  で与えられる。すなわち、K' は $\mathbf{X}$ に依存して決定されることになる。

[†] 解答の作成にあたっては、経済学研究科 D1 の川元康一氏に協力して頂いた。

[‡] E-mail address:ege001ar@mail2.econ.osaka-u.ac.jp

- A' (今期の TFP) は、仮定より $A' = As$ のように、$\mathbf{X}$ の要素である A, s によって決定される。
- 仮定より s は Markov Process に従うので、s' の確率分布は $\mathbf{X}$ の要素である s のみに依存する。

以上より、毎期の消費と労働供給が optimal policy に従うとき、$\mathbf{X}' = [K', A', s']$ の確率分布は $\mathbf{X} = [K, A, s]$ のみに依存することになり、すなわち、state vector $\mathbf{X}$ は Markov process に従うことになる。

optimal policy に従っているときの state vector $\mathbf{X}$ の遷移確率 $\Pi(\mathbf{X}'|\mathbf{X})$ は、

$$\Pi\left(\mathbf{X}' = [K^*(\mathbf{X}), As, s_j] \,|\, \mathbf{X} = [K, A, s_i]\right) = p_{ji}, \quad i, j = h, l, \tag{5}$$

で定義される[1]。

(問題 1-2)

この CPP における value function を $v(K, A, s)$ と定義する[2]。Bellman equation は以下のように定式化される。

$$v(K, A, s) = \max_{C,N,K'} \left\{ u(C, 1-N) + \beta \sum_{s'} \pi(s'|s) v(K', A', s') \right\}, \tag{6}$$

$$\text{s.t.} \quad K' + C = AsK^{\alpha}N^{1-\alpha} + (1-\delta)K, \tag{7}$$

$$A' = As. \tag{8}$$

(7) より K' を、(8) より A' を Bellman equation (6) に代入すると

$$v(K, A, s) = \max_{C,N} \left\{ u(C, 1-N) + \beta \sum_{s'} \pi(s'|s) v\left[AsK^{\alpha}N^{1-\alpha} + (1-\delta)K - C, As, s'\right] \right\}. \tag{9}$$

C についての f.o.c. は、

$$u_c(C^*(\mathbf{X}), 1 - N^*(\mathbf{X})) - \beta \sum_{s'} \pi(s'|s) v_K \left[AsK^{\alpha}N^*(\mathbf{X})^{1-\alpha} + (1-\delta)K - C^*(\mathbf{X}), As, s'\right] = 0. \tag{10}$$

N についての f.o.c. は、

$$\begin{aligned} -u_l(C^*(\mathbf{X}), 1 - N^*(\mathbf{X})) &+ \beta \sum_{s'} \pi(s'|s)(1-\alpha)AsK^{\alpha}N^*(\mathbf{X})^{-\alpha} \\ &\times v_K \left[AsK^{\alpha}N^*(\mathbf{X})^{1-\alpha} + (1-\delta)K - C^*(\mathbf{X}), As, s'\right] = 0. \end{aligned} \tag{11}$$

ここで、(11) 式の第 2 項の和記号の中の $(1-\alpha)AsK^{\alpha}N^*(\mathbf{X})^{-\alpha}$ は s' に依存しない、従って、和記号の外に出せることに注意する。すなわち、

$$\begin{aligned} &u_l(C^*(\mathbf{X}), 1 - N^*(\mathbf{X})) \\ &= (1-\alpha)AsK^{\alpha}N^*(\mathbf{X})^{-\alpha} \beta \sum_{s'} \pi(s'|s) v_K \left[AsK^{\alpha}N^*(\mathbf{X})^{1-\alpha} + (1-\delta)K - C^*(\mathbf{X}), As, s'\right]. \end{aligned} \tag{12}$$

[1] $A' = As$, $K' = K^*(\mathbf{X})$ とならないような $\mathbf{X}'$ が次期に生起する確率は定義されない、あるいは、ゼロである。

[2] もちろん、$v(\mathbf{X})$ と書いても構わない。

これに (10) を代入すると、N についての f.o.c. は

$$u_l(C^*(\mathbf{X}),1-N^*(\mathbf{X})) = (1-\alpha)AsK^\alpha N^*(\mathbf{X})^{-\alpha}u_c(C^*(\mathbf{X}),1-N^*(\mathbf{X})), \tag{13}$$

と書き換えられる。

以上より、前問で定義した optimal policy に従っている時の state の遷移確率 $\Pi(\mathbf{X}'|\mathbf{X})$ を用いると、optimal policy $C^*(\mathbf{X})$, $N^*(\mathbf{X})$ が満たすべき一階条件は、

$$C^*(\mathbf{X})^{-\gamma} = \beta\sum_{\mathbf{X}'}\Pi(\mathbf{X}'|\mathbf{X})v_K\left[AsK^\alpha N^*(\mathbf{X})^{1-\alpha}+(1-\delta)K-C^*(\mathbf{X}),As,s'\right], \tag{14}$$

$$\frac{1}{1-N^*(\mathbf{X})} = (1-\alpha)AsK^\alpha N^*(\mathbf{X})^{-\alpha}C^*(\mathbf{X})^{-\gamma}, \tag{15}$$

で与えられる。

(問題 1-3)

毎期の消費と労働供給が optimal policy $C=C^*(\mathbf{X})$, $N=N^*(\mathbf{X})$ に従うとき次期の資本量についての optimal policy (K の law of motion) $K'=K^*(\mathbf{X})$ は、資源制約式 (7) より

$$K^*(\mathbf{X}) = AsK^\alpha N^*(\mathbf{X})^{1-\alpha}+(1-\delta)K-C^*(\mathbf{X}), \tag{16}$$

で与えられる。これと、前問の 2 つの f.o.c. が optimal policy function を求めるための方程式となるが、(14) には value function も未知数として残ってしまっているため、これを消去しなくてはならない。以下では、Benveniste-Scheinkman condition を用いて value function を消去し、Euler equation を導出する。

Bellman equation (9) に optimal policy を代入すると、max operator が外れて、

$$v(K,A,s) = u\left[C^*(\mathbf{X}),1-N^*(\mathbf{X})\right]+\beta\sum_{\mathbf{X}'}\Pi(\mathbf{X}'|\mathbf{X})v\left[AsK^\alpha N^*(\mathbf{X})^{1-\alpha}+(1-\delta)K-C^*(\mathbf{X}),As,s'\right]. \tag{17}$$

この式の両辺を今期の内生 state 変数 K で微分すると、envelope theorem (state についての微分をするとき、state の変化に対する optimal policy の反応の効果は無視できる) より、

$$v_k(K,A,s) = \beta\left[\alpha AsK^{\alpha-1}N^*(\mathbf{X})^{1-\alpha}+1-\delta\right]\sum_{\mathbf{X}'}\Pi(\mathbf{X}'|\mathbf{X})v_k(K',A',s'), \tag{18}$$

となる[3][4]。この式の右辺に (14) を代入すると、

$$v_k(K,A,s) = u_c\left[C^*(\mathbf{X}),1-N^*(\mathbf{X})\right]\left\{\alpha AsK^{\alpha-1}N^*(\mathbf{X})^{1-\alpha}+1-\delta\right\}, \tag{19}$$

[3]但し、$[\alpha AsK^{\alpha-1}N^*(\mathbf{X})^{1-\alpha}+1-\delta]$ は $\mathbf{X}'$ に依存しないため、和記号の外に出せる、ということを用いている。

[4]念のため Bellman equation の両辺を K で微分するときに optimal policy の K についての微分も考慮しても、その微分係数の掛かる項は f.o.c. (14), (15) より消去できることが分かる。

のように、Benveniste-Scheinkman condition が得られる。この式を 1 期先にずらしたものは[5]、

$$v_k(K', A', s') = u_c\left[C^*(\mathbf{X}'), 1 - N^*(\mathbf{X}')\right]\left\{\alpha A' s' K^*(\mathbf{X})^{\alpha-1} N^*(\mathbf{X}')^{1-\alpha} + 1 - \delta\right\}. \tag{20}$$

これを (14) の右辺に代入し、value function を消去することで、Euler equation

$$1 = \beta \sum_{\mathbf{X}'} \Pi(\mathbf{X}'|\mathbf{X}) \frac{C^*(\mathbf{X}')^{-\gamma}}{C^*(\mathbf{X})^{-\gamma}} \left\{\alpha A' s' K^*(\mathbf{X})^{\alpha-1} N^*(\mathbf{X}')^{1-\alpha} + 1 - \delta\right\}, \tag{21}$$

が得られる。

以上より、optimal policy function $C = C^*(\mathbf{X})$, $N = N^*(\mathbf{X})$, $K' = K^*(\mathbf{X})$ のみを未知数として持つ 3 本の連立方程式が以下のように得られる。

- 消費と余暇の代替に関する条件

$$\frac{1}{1 - N^*(\mathbf{X})} = (1-\alpha) A s K^\alpha N^*(\mathbf{X})^{-\alpha} C^*(\mathbf{X})^{-\gamma}. \tag{22}$$

- オイラー方程式

$$1 = \beta \sum_{\mathbf{X}'} \Pi(\mathbf{X}'|\mathbf{X}) \frac{C^*(\mathbf{X}')^{-\gamma}}{C^*(\mathbf{X})^{-\gamma}} \left\{\alpha A' s' K^*(\mathbf{X})^{\alpha-1} N^*(\mathbf{X}')^{1-\alpha} + 1 - \delta\right\}. \tag{23}$$

- K の law of motion

$$K^*(\mathbf{X}) = A s K^\alpha N^*(\mathbf{X})^{1-\alpha} + (1-\delta) K - C^*(\mathbf{X}). \tag{24}$$

問題 2

Competitive Economy. 前問の設定に以下を追加。

- 各消費者の瞬時効用関数 (felicity function)

$$u(c, 1-n) = \frac{c^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma} + \log(1-n). \tag{25}$$

- 賃金 $w(\mathbf{X})$, 資本のレンタル価格 $r(\mathbf{X})$, Arrow security の価格 $Q(\mathbf{X}'|\mathbf{X})$.

[5] $K' = K^*(\mathbf{X})$ に注意。Benveniste-Scheinkman 公式は、optimal policy に従って行動しているときの議論である。

(問題 2-1)

経済には同質的な消費者が多数存在している。個々の消費者の消費量、労働供給量、貯蓄量は集計量に比べて十分小さく、個々の消費者は自身の行動が集計量に与える影響はないものとして行動することになる。すなわち、消費者にとっては経済の state$A$, s に加えて (将来の) 集計資本量 K も外生変数であり、各期の Aggregate state $\mathbf{X}$ も外生変数となる。

消費者は無限期先の将来まで考えて行動するが、将来の価格は将来の Aggregate state に依存するため、消費者が所与とすべき将来の価格を予想するためには、将来の Aggregate state が現在の Aggregate state を元にしてどのよう遷移してゆくのかについての、何らかの予想を立てなければならない。具体的には、A, s の遷移についての情報は知っているが、経済の集計資本量の law of motion については何らかの予想 $K' = G(\mathbf{X})$ を持たなければならない。この予想をもとにして Aggregate state の遷移確率 $\widehat{\Pi}(\mathbf{X}'|\mathbf{X})$ が導かれ[6]、これをもとに将来の価格を考えて行動することになる。

上で示したように、各消費者にとって Aggregate state $\mathbf{X}$ の遷移は所与である。従って、遷移確率 $\widehat{\Pi}(\mathbf{X}'|\mathbf{X})$ も所与として行動することになる。

(問題 2-2)

ある期の、個々の消費者にとっての state 変数は、各消費者の当該期に持ち越してきた資産 a と、Aggregate での state vector $\mathbf{X} = [K, A, s]$ である[7]。消費者の value function を $J(a, \mathbf{X})$ と定義する。Bellman equation は以下のように定式化される。

$$J(a, \mathbf{X}) = \max_{c,n,\bar{a}(\mathbf{X}')} \left\{ u(c, 1-n) + \beta \sum_{\mathbf{X}'} \widehat{\Pi}(\mathbf{X}'|\mathbf{X}) J(\bar{a}(\mathbf{X}'), \mathbf{X}') \right\}, \tag{26}$$

$$\text{s.t.} \quad c + \sum_{\mathbf{X}'} Q(\mathbf{X}'|\mathbf{X}) \bar{a}(\mathbf{X}') = w(\mathbf{X}) n + a. \tag{27}$$

制約条件を用いて c を消去した Bellman equation は、

$$J(a, \mathbf{X}) = \max_{n,\bar{a}(\mathbf{X}')} \left\{ u\Big[w(\mathbf{X}) n + a - \sum_{\mathbf{X}'} Q(\mathbf{X}'|\mathbf{X}) \bar{a}(\mathbf{X}'), 1-n \Big] + \beta \sum_{\mathbf{X}'} \widehat{\Pi}(\mathbf{X}'|\mathbf{X}) J(\bar{a}(\mathbf{X}'), \mathbf{X}') \right\}. \tag{28}$$

以下では消費と労働供給に関する optimal policy をそれぞれ $n = n^*(a, \mathbf{X})$, $\bar{a}(\mathbf{X}') = a^*(a, \mathbf{X}; \mathbf{X}')$ と表す。

n に関する f.o.c. は

$$\begin{aligned} & u_c\Big[w(\mathbf{X}) n^*(a, \mathbf{X}) + a - \sum_{\mathbf{X}'} Q(\mathbf{X}'|\mathbf{X}) \bar{a}^*(a, \mathbf{X}; \mathbf{X}'), 1 - n^*(a, \mathbf{X}) \Big] w(\mathbf{X}) \\ & \quad - u_l\Big[w(\mathbf{X}) n^*(a, \mathbf{X}) + a - \sum_{\mathbf{X}'} Q(\mathbf{X}'|\mathbf{X}) \bar{a}^*(a, \mathbf{X}; \mathbf{X}'), 1 - n^*(a, \mathbf{X}) \Big] = 0. \end{aligned} \tag{29}$$

[6]具体的には、law of motion の予想 $K' = G(\mathbf{X})$ を用いて、

$$\Pi\left(\mathbf{X}' = [G(\mathbf{X}), As, s_j] \,|\, \mathbf{X} = [K, A, s_i]\right) = p_{ji}, \quad i, j = h, l,$$

のように定義されることになる。

[7]消費者にとって、a は内生的 state variable, $\mathbf{X}$ は (前問での議論の通り) 外生的 state variable である。

$\bar{a}(\mathbf{X}')$ に関する f.o.c. は (各 $\bar{a}(\mathbf{X}')$ について)、

$$
\begin{aligned}
-u_c\Big[w(\mathbf{X})n^*(a,\mathbf{X}) + a - \sum_{\mathbf{X}'} Q(\mathbf{X}'|\mathbf{X})\bar{a}^*(a,\mathbf{X};\mathbf{X}'), 1 - n^*(a,\mathbf{X})\Big] Q(\mathbf{X}'|\mathbf{X})& \\
+\beta\widehat{\Pi}(\mathbf{X}'|\mathbf{X})J_a(\bar{a}^*(a,\mathbf{X};\mathbf{X}'),\mathbf{X}') = 0.& \qquad (30)
\end{aligned}
$$

(29), (30) より、optimal policy $n = n^*(a,\mathbf{X})$, $\bar{a}(\mathbf{X}') = a^*(a,\mathbf{X};\mathbf{X}')$ が満たすべき一階条件は以下で与えられる。

$$
\Big\{\underbrace{w(\mathbf{X})n^*(a,\mathbf{X}) + a - \sum_{\mathbf{X}'} Q(\mathbf{X}'|\mathbf{X})a^*(a,\mathbf{X};\mathbf{X}')}_{c^*(a,\mathbf{X})}\Big\}^{-\gamma} w(\mathbf{X}) = \frac{1}{1-n^*(a,\mathbf{X})}, \qquad (31)
$$

$$
\Big\{\underbrace{w(\mathbf{X})n^*(a,\mathbf{X}) + a - \sum_{\mathbf{X}'} Q(\mathbf{X}'|\mathbf{X})a^*(a,\mathbf{X};\mathbf{X}')}_{c^*(a,\mathbf{X})}\Big\}^{-\gamma} Q(\mathbf{X}'|\mathbf{X}) = \beta\widehat{\Pi}(\mathbf{X}'|\mathbf{X})J_a(a^*(a,\mathbf{X};\mathbf{X}'),\mathbf{X}'). \qquad (32)
$$

(問題 2-3)

optimal policy $n = n^*(a,\mathbf{X})$, $\bar{a}(\mathbf{X}') = a^*(a,\mathbf{X};\mathbf{X}')$ を前問の制約条件 (予算制約式) に代入すると、c に関する optimal policy $c = c^*(a,\mathbf{X})$ は

$$
c^*(a,\mathbf{X}) = w(\mathbf{X})n^*(a,\mathbf{X}) + a - \sum_{\mathbf{X}'} Q(\mathbf{X}'|\mathbf{X})a^*(a,\mathbf{X};\mathbf{X}'), \qquad (33)
$$

となる。これを用いると、前問で求めた 2 種類の f.o.c. は

$$
u_c\left[c^*(a,\mathbf{X}), 1-n^*(a,\mathbf{X})\right] w(\mathbf{X}) = u_l\left[c^*(a,\mathbf{X}), 1-n^*(a,\mathbf{X})\right], \qquad (34)
$$

$$
u_c\left[c^*(a,\mathbf{X}), 1-n^*(a,\mathbf{X})\right] Q(\mathbf{X}'|\mathbf{X}) = \beta\widehat{\Pi}(\mathbf{X}'|\mathbf{X})J_a(a^*(a,\mathbf{X};\mathbf{X}'),\mathbf{X}'). \qquad (35)
$$

これら 3 種類の条件式が消費者の最適行動を特徴付けるが、(35) には value function も未知数として残ってしまっているため、これを消去しなくてはならない。以下では、Benveniste-Scheinkman condition を用い、value function を含まない形で Euler equation を表現する。

Bellman equation (28) に optimal policy $n = n^*(a,\mathbf{X})$, $\bar{a}(\mathbf{X}') = a^*(a,\mathbf{X};\mathbf{X}')$ を代入すると、max operator が外れて

$$
\begin{aligned}
J(a,\mathbf{X}) = u\Big[w(\mathbf{X})n^*(a,\mathbf{X}) + a - \sum_{\mathbf{X}'} Q(\mathbf{X}'|\mathbf{X})a^*(a,\mathbf{X};\mathbf{X}'), 1 - n^*(a,\mathbf{X})\Big]& \\
+ \beta\sum_{\mathbf{X}'} \widehat{\Pi}(\mathbf{X}'|\mathbf{X})J(a^*(a,\mathbf{X};\mathbf{X}'),\mathbf{X}').& \qquad (36)
\end{aligned}
$$

この両辺を今期の内生 state 変数 a で微分すると、envelope theorem より[8]

$$J_a(a,\mathbf{X}) = u_c\Big[w(\mathbf{X})n^*(a,\mathbf{X}) + a - \sum_{\mathbf{X}'} Q(\mathbf{X}'|\mathbf{X})a^*(a,\mathbf{X};\mathbf{X}'), 1-n^*(a,\mathbf{X})\Big].$$
$$= u_c\left[c^*(a,\mathbf{X}), 1-n^*(a,\mathbf{X})\right] \tag{37}$$

上式が、Benveniste-Scheinkman condition である。

これを 1 期先にずらしたものは ($\bar{a}(\mathbf{X}') = a^*(a,\mathbf{X};\mathbf{X}')$ に注意して)、

$$J_a(a^*(a,\mathbf{X};\mathbf{X}'),\mathbf{X}') = u_c\left[c^*(a^*(a,\mathbf{X};\mathbf{X}'),\mathbf{X}'), 1-n^*(a^*(a,\mathbf{X};\mathbf{X}'),\mathbf{X}')\right] \tag{38}$$

これを、$\bar{a}(\mathbf{X}')$ に関する f.o.c. (35) に代入することで value function が消去され、消費者の効用最大化のための Euler equation

$$Q(\mathbf{X}'|\mathbf{X}) = \beta\frac{u_c\left[c^*(a^*(a,\mathbf{X};\mathbf{X}'),\mathbf{X}'), 1-n^*(a^*(a,\mathbf{X};\mathbf{X}'),\mathbf{X}')\right]}{u_c\left[c^*(a,\mathbf{X}), 1-n^*(a,\mathbf{X})\right]}\widehat{\Pi}(\mathbf{X}'|\mathbf{X}), \tag{39}$$

を得る。

以上より、消費者の行動における optimal policy $c^*(a,\mathbf{X})$, $n^*(a,\mathbf{X})$, $a^*(a,\mathbf{X};\mathbf{X}')$ のみを未知変数として持つ 3 種類の連立方程式が以下のように得られる。

- 消費と余暇の代替に関する条件

$$\frac{1}{1-n^*(a,\mathbf{X})} = c^*(a,\mathbf{X})^{-\gamma}w(\mathbf{X}). \tag{40}$$

- オイラー方程式

$$Q(\mathbf{X}'|\mathbf{X}) = \beta\frac{c^*(a^*(a,\mathbf{X};\mathbf{X}'),\mathbf{X}')^{-\gamma}}{c^*(a,\mathbf{X})^{-\gamma}}\widehat{\Pi}(\mathbf{X}'|\mathbf{X}). \tag{41}$$

- 予算制約式

$$c^*(a,\mathbf{X}) + \sum_{\mathbf{X}'} Q(\mathbf{X}'|\mathbf{X})a^*(a,\mathbf{X};\mathbf{X}') = w(\mathbf{X})n^*(a,\mathbf{X}) + a. \tag{42}$$

(問題 2-4)

生産企業 (type I firm) の資本需要量を k^I, 労働需要量を n^I と置くと、生産企業の利潤最大化問題は、

$$\max_{k^I,n^I} \pi^I = As(k^I)^\alpha(n^I)^{1-\alpha} - w(\mathbf{X})n^I - r(\mathbf{X})k^I, \tag{43}$$

[8]念のため Bellman equation の両辺を a で微分するときに optimal policy の a についての微分も考慮しても、その微分係数の掛かる項は f.o.c. (34), (35) より消去できることが分かる。

のように (1 期間の利潤を各期最大化する形で) 定式化される。利潤最大化条件は、

$$\underbrace{\alpha As(k^I)^{\alpha-1}(n^I)^{1-\alpha}}_{F_{k^I}(k^I,n^I)} = r(\mathbf{X}), \tag{44}$$

$$\underbrace{(1-\alpha)As(k^I)^{\alpha}(n^I)^{-\alpha}}_{F_{n^I}(k^I,n^I)} = w(\mathbf{X}), \tag{45}$$

で与えられる。

(問題 2-5)

リース企業 (type II firm) は Arrow security を発行することによって資金を調達する。そしてその資金を用いて各期に財を購入し、その財 1 単位につき次期の 1 単位の資本を生産して生産企業 (type I firm) に貸し出し、収益を得る。

今期のリース企業の財の購入量を $k^{II\prime}$ で表す。これを資本に変換して、生産企業の次期の生産要素として貸し出すと、次期の Aggregate state が $\mathbf{X}'$ であれば、次期に $[r(\mathbf{X}')+1-\delta]k^{II\prime}$ 単位の財を収入として得られることになる[9]。次期の state が $\mathbf{X}'$ であった場合の、次期の財 1 単位の今期における価値は $Q(\mathbf{X}'|\mathbf{X})$ である。従って、次期に生起しうる全ての state に関する Arrow security を発行した場合の、今期のリース企業の利潤は、

$$\begin{aligned}\pi^{II} &= -k^{II\prime} + \sum_{\mathbf{X}'} Q(\mathbf{X}'|\mathbf{X})[r(\mathbf{X}')+1-\delta]k^{II\prime} \\ &= k^{II\prime}\left\{-1 + \sum_{\mathbf{X}'} Q(\mathbf{X}'|\mathbf{X})[r(\mathbf{X}')+1-\delta]\right\},\end{aligned} \tag{46}$$

で与えられることになる。この利潤関数は、次期に貸し出す資本量 $k^{II\prime}$ について線形となっている。従って、Aggregate state $\mathbf{X}$ や価格を所与として行動するこの企業の利潤最大化問題の解は以下のようになる。

$$k^{II\prime} = \begin{cases} 0 & \text{when} \quad \sum_{\mathbf{X}'} Q(\mathbf{X}'|\mathbf{X})[r(\mathbf{X}')+1-\delta] < 1 \\ {}^{\forall}k^{II\prime} \geq 0 & \text{when} \quad \sum_{\mathbf{X}'} Q(\mathbf{X}'|\mathbf{X})[r(\mathbf{X}')+1-\delta] = 1 \\ +\infty & \text{when} \quad \sum_{\mathbf{X}'} Q(\mathbf{X}'|\mathbf{X})[r(\mathbf{X}')+1-\delta] > 1 \end{cases} \tag{47}$$

このとき、もし $\sum_{\mathbf{X}'} Q(\mathbf{X}'|\mathbf{X})[r(\mathbf{X}')+1-\delta] > 1$ であれば、個々のリース企業にとってはいくら資本を貸し出していても、さらに追加的に財を購入し資本として貸し出すことで利潤を得られ、さらに、新たに参入するリース企業にとっても、参入することで利潤を得られる状況である。すなわち、このような状況は均衡とはなり得ない[10]。

[9] 従って、次期の state $\mathbf{X}'$ に対応する Arrow security を、今期の財単位で $Q(\mathbf{X}'|\mathbf{X})[r(\mathbf{X}')+1-\delta]k^{II\prime}$ だけ売ることが可能になる。

[10] このような場合、次期の資本の限界生産性は限りなくゼロに近くなり、資本のレンタル価格もゼロになるはずである。また、当然次期に無限に資本を投入する状況は、今期の財市場の均衡 (もしくは feasibility) にも反する。

また、もし $\sum_{\mathbf{X}'} Q(\mathbf{X}'|\mathbf{X})[r(\mathbf{X}')+1-\delta] < 1$ であれば、リース企業にとっては財を購入し資本として貸し出すことが損失を生み出すことになり、リース企業は市場に参入してくることはなくなる[11]。

以上より、有限かつ正の値の量の資本の供給 $k^{II'}$ がリース企業の利潤最大化に矛盾せず、かつ新たなリース企業が参入してこない状況 (ゼロ利潤) であるための条件は

$$\sum_{\mathbf{X}'} Q(\mathbf{X}'|\mathbf{X})[r(\mathbf{X}')+1-\delta] = 1, \tag{48}$$

となる[12]。

(問題 2-6)

前問までの議論では、Aggregate state によって決まる価格を所与として、家計や企業が各市場における需要量や供給量をどのように最適に決定するかを見てきた。Recursive Competitive Equilibrium においては、これら各主体の需要量、供給量、各主体が所与とした集計量とその遷移確率が、以下の関係を満たしていなければならない。

1 各市場での需給の一致　各市場での需要量を左辺に、供給量を右辺に書くと、

- 財市場[13]

$$\underbrace{c^*(a,\mathbf{X})}_{\text{消費需要}} + \underbrace{k^{II'}}_{\text{投資需要}} = \underbrace{As(k^I)^{\alpha-1}(n^I)^{1-\alpha}}_{\text{生産}} + \underbrace{(1-\delta)k^{II}}_{\text{前期からの資本の持ち越し}} . \tag{49}$$

- 労働市場

$$n^I = n^*(a,\mathbf{X}). \tag{50}$$

- 資本レンタル市場

$$k^I = k^{II}. \tag{51}$$

- 信用市場 (Arrow security の市場)
  (証券発行時での需給一致). 次期に生起しうる各 $\mathbf{X}'$ についての Arrow security の需要量、供給量より

$$a^*(a,\mathbf{X};\mathbf{X}') = k^{II'}[r(\mathbf{X}')+1-\delta]. \tag{52}$$

  (償還時における一致). state $\mathbf{X}$ が実現したときの (前期に発行されていた)Arrow security の償還時に着目すると

$$a = k^{II}[r(\mathbf{X})+1-\delta]. \tag{53}$$

[11] このような状況では、生産関数の稲田条件より次期の資本の限界生産性は無限大となり、資本のレンタル価格も限りなく大きくなるはずである。

[12] このような条件は、企業にとって参入するかしないかに無差別であるという意味で、自由参入条件 (free-entry condition) と呼ばれる。

[13] 他の 3 つの市場の需給条件 (50), (51), (52), (53) を家計の予算 (42) に代入し、さらに企業の利潤最大化条件 (44), (45), (48) を用いると、財市場の需給の一致条件 (49) が自動的に導かれることが分かる。これは、他の全ての市場が均衡していれば、残りの 1 つの市場は自動的に均衡するという性質 (ワルラス法則) を表している。

2 集計量と各主体が選択する変数の一致　各主体が所与としている Aggregate state $\mathbf{X}$ の要素である集計資本量 K は、均衡においては生産企業の資本需要量 k^I、リース企業の資本供給量 k^{II} と一致していなければならない。

$$K = k^I = k^{II}. \tag{54}$$

ちなみに、この条件 (54) を先の信用市場均衡条件 (52), (53) に用いて、リース企業の自由参入条件 (48) を用いると、

$$a = K[r(\mathbf{X}) + 1 - \delta], \tag{55}$$

$$\sum_{\mathbf{X}'} a^*(a, \mathbf{X}; \mathbf{X}')Q(\mathbf{X}'|\mathbf{X}) = K', \tag{56}$$

となっていることに注意する。

3 合理的期待均衡　上記の資本レンタル市場の需給条件 (51)、集計資本量に関する条件 (54)、労働市場需給条件 (50)、信用市場需給条件 (52)、(53) のそれぞれを課すと[14]、財市場の需給条件 (49) より、集計資本量 K の均衡における law of motion が以下のように得られる。

$$K' = AsK^{\alpha}n^*(K[r(\mathbf{X}) + 1 - \delta], \mathbf{X})^{1-\alpha} + (1-\delta)K - c^*(K[r(\mathbf{X}) + 1 - \delta], \mathbf{X}). \tag{57}$$

この、均衡における実際の K の law of motion (K' を表す $\mathbf{X}$ の関数) は、消費者が、最初に $K' = G(\mathbf{X})$ を予想して需要量を決定して行動した結果として得られるものである。RCE においては、この予想が合理的、すなわち、予想の結果としての law of motion が最初の予想と一致するように予想がされていなければならない。すなわち、消費者が持つ Aggregate state の law of motion の予想 $G(\mathbf{X})$ と、その予想より導かれる optimal policy function が

$$G(\mathbf{X}) = AsK^{\alpha}n^*(K[r(\mathbf{X}) + 1 - \delta], \mathbf{X})^{1-\alpha} + (1-\delta)K - c^*(K[r(\mathbf{X}) + 1 - \delta], \mathbf{X}), \tag{58}$$

という関係を満たしていなければならない。

(問題 2-7)

RCE の条件の一つ (企業 I, II の資本量と集計資本量の一致) である (54) と信用市場均衡条件 (53) より、均衡では $a = K[r(\mathbf{X}) + 1 - \delta]$ となっていることを用いると、均衡経路上 (on-path) における個人の行動は、

$$c^*(a, \mathbf{X}) = c^*(K[r(\mathbf{X}) + 1 - \delta], \mathbf{X}) = \bar{c}^*(\mathbf{X}), \tag{59}$$

$$n^*(a, \mathbf{X}) = n^*(K[r(\mathbf{X}) + 1 - \delta], \mathbf{X}) = \bar{n}^*(\mathbf{X}), \tag{60}$$

のように $\mathbf{X} = [K, A, s]$ の関数として表せることになる。以下では、これら均衡経路上での消費と労働供給 $\bar{c}^*(\mathbf{X})$, $\bar{n}^*(\mathbf{X})$ と集計資本量の law of motion $K' = G(\mathbf{X})$ がどのように特徴付けられるかを見る。

[14] (52) を課すときには (48) より $\sum_{\mathbf{X}'} Q(\mathbf{X}'|\mathbf{X})[r(\mathbf{X}') + 1 - \delta] = 1$ となっていることを用いる。

消費者の消費と余暇の代替条件 (40) について、賃金率が企業の利潤最大化条件 (45) より決定されていることを用いると、

$$\frac{1}{1-\bar{n}^*(\mathbf{X})} = (1-\alpha)AsK^{\alpha}\bar{n}^*(\mathbf{X})^{-\alpha}\bar{c}^*(\mathbf{X})^{-\gamma}. \tag{61}$$

消費者のオイラー方程式 (41) をリース企業の自由参入条件 (48) に代入し、資本のレンタル価格が企業の利潤最大化条件 (44) より決定されていることを用いると、

$$1 = \beta\sum_{\mathbf{X}'}\Pi(\mathbf{X}'|\mathbf{X})\frac{\bar{c}^*(\mathbf{X}')^{-\gamma}}{\bar{c}^*(\mathbf{X})^{-\gamma}}\left\{\alpha A's'G(\mathbf{X})^{\alpha-1}\bar{n}^*(\mathbf{X})^{1-\alpha}+1-\delta\right\}, \tag{62}$$

ただし、$K' = G(\mathbf{X})$ を用いている。また、Aggregate state の遷移確率 $\Pi(\mathbf{X}'|\mathbf{X})$ は均衡経路上の law of motion から含意されるものであることに注意する[15]。最後に合理的期待均衡条件 (58) より、

$$G(\mathbf{X}) = AsK^{\alpha}\bar{n}^*(\mathbf{X})^{1-\alpha} + (1-\delta)K - \bar{c}^*(\mathbf{X}). \tag{63}$$

均衡経路上の消費量 $\bar{c}^*(\mathbf{X})$、労働供給量 $\bar{n}^*(\mathbf{X})$、資本の law of motion $K' = G(\mathbf{X})$ は、以上の (61), (62), (63) の 3 種類の連立方程式により特徴付けられるが、これらの連立方程式の形は、CPP の解を特徴付ける連立方程式、(22), (23), (24) と一致していることが分かる。すなわち、RCE における資源配分は、均衡経路上において、CPP の資源配分と一致している (Pareto optimal である) ことが分かる。

[15] 具体的には、均衡経路上の law of motion (63) を用いて、

$$\Pi\left(\mathbf{X}' = [G(\mathbf{X}), As, s_j]\,|\,\mathbf{X} = [K, A, s_i]\right) = p_{ji}, \quad i, j = h, l,$$

のように定義されることになる。