マクロ経済II第八回宿題解答[†]

TA：荒渡良[‡]

問題1

(1)

Arrow-Debreu sequrity の定義：

Arrow-Debreu security とは、ある特定の t 期に特定の history λ^t が実現したのならば、財を 1 単位渡すことを約束し、かつ全ての取引を 0 時点に行うような sequrity のことである。

具体的な取引の方法：

取引は 0 時点において、Arrow-Debreu sequrity 1 単位と財 $q_t^0(\lambda^t)$ 単位を交換することによって行われる。

(2)

まず、代表的個人が直面する問題は以下のように記述される。

$$\max\ -\frac{1}{2}\sum_{t=0}^{\infty}\sum_{\lambda^t}(0.98)^t\left[c_t(\lambda^t)\right]^{-2}\pi_t(\lambda^t), \tag{1}$$

$$\text{s.t.}\quad \sum_{t=0}^{\infty}\sum_{\lambda^t}c_t(\lambda^t)q_t^0(\lambda^t)\leq\sum_{t=0}^{\infty}\sum_{\lambda^t}d_t(\lambda^t)q_t^0(\lambda^t). \tag{2}$$

Lagrangian を L、Lagrange Multiplier を μ とおくと

$$L=-\frac{1}{2}\sum_{t=0}^{\infty}\sum_{\lambda^t}(0.98)^t\left[c_t(\lambda^t)\right]^{-2}\pi_t(\lambda^t)+\mu\left\{\sum_{t=0}^{\infty}\sum_{\lambda^t}d_t(\lambda^t)q_t^0(\lambda^t)-\sum_{t=0}^{\infty}\sum_{\lambda^t}c_t(\lambda^t)q_t^0(\lambda^t)\right\}. \tag{3}$$

$c_t(\lambda^t)$ について f.o.c. を求めると、

$$q_t^0(\lambda^t)=\frac{1}{\mu}\frac{(0.98)^t\pi_t(\lambda^t)}{\left[c_t(\lambda^t)\right]3}\quad\forall t,\lambda^t. \tag{4}$$

[†]解答の作成にあたっては、経済学研究科 D1 の川元康一氏に協力して頂いた。

[‡]E-mail address:ege001ar@mail2.econ.osaka-u.ac.jp

ここで、$q_0^0(\lambda^0) = 1$ と資源制約 $c_0(\lambda^0) = d_0(\lambda^0) = 1$、および初期 state が given であることから $\pi_0(\lambda^0) = 1$ なので、

$$1 = \frac{1}{\mu} \frac{(0.98)^0 \pi_0(\lambda^0)}{[d_0(\lambda^0)]\,3} = \frac{1}{\mu} \;\Leftrightarrow\; \mu = 1, \tag{5}$$

である。

また、資源制約と与えられた endowment process より

$$c_t(\lambda^t) = d_t(\lambda^t) = \lambda_t \lambda_{t-1} \cdots \lambda_1, \tag{6}$$

なので、これらを (4) の f.o.c. に代入すると、以下のように任意の t 期に historyλ^t が実現したならば財を一単位受け取れる Arrow-Debreu sequrity の価格が求まる。

$$q_t^0(\lambda^t) = \frac{(0.98)^t \pi_t(\lambda^t | \lambda_0)}{[\lambda_t \lambda_{t-1} \cdots \lambda_1]^3} \quad \forall t, \lambda^t. \tag{7}$$

(3)

小問 (2) で求めた Arrow-Debreu sequrity の価格より、以下のように求められる。

$$\begin{aligned} q_2^0(\tilde{\lambda}^2) &= \frac{(0.98)^t \pi_2(\tilde{\lambda}^2)}{[0.99 \times 0.99]^3} \\ &= \frac{(0.98)^2 \Pr(\lambda_2 = 0.99 \big| \lambda_1 = 0.99) \times \Pr(\lambda_1 = 0.99 \big| \lambda_0 = 1.02)}{[0.99 \times 0.99]^3} \\ &= \frac{(0.98)^2 (0.2 \times 0.7)}{[0.99 \times 0.99]^3} \\ &= 0.1428. \end{aligned} \tag{8}$$

(4)

$t = 1$ 時点で必ず 1 単位の財を受け取れることが出来る claim(安全資産) の time-0 での価格を p_1^0 と表す。

この時、裁定条件より、p_1^0 は $t = 1$ で必ず財を 1 単位受け取れるように Arrow-Debreu sequrity を購入する為にかかる費用と一致する。与えられた初期条件より $\lambda_0 = \bar{\lambda_2} = 1.02$ なので、time-1 までに実現しうる history は

$$(\lambda_1, \lambda_0) = (\bar{\lambda_1}, \bar{\lambda_2}), \quad (\lambda_1, \lambda_0) = (\bar{\lambda_2}, \bar{\lambda_2}). \tag{9}$$

の二つである。また、それぞれの history が実現した時に財を 1 単位受け取ることができる Arrow-Debreu sequrity の価格は、小問 (2) の答えより

$$q_1^0(\bar{\lambda_1}, \bar{\lambda_2}) = \frac{(0.98)^1(0.2)}{[0.99]^3} = 0.2020. \tag{10}$$

$$q_1^0(\bar{\lambda_2}, \bar{\lambda_2}) = \frac{(0.98)^1(0.8)}{[1.02]^3} = 0.7388. \tag{11}$$

以上より

$$\begin{aligned} p_2^0 &= q_1^0(\bar{\lambda_1}, \bar{\lambda_2}) + q_1^0(\bar{\lambda_2}, \bar{\lambda_2}) \\ &= 0.9408. \end{aligned} \tag{12}$$

問題 2

(1)

Natural debt limit (NDL) とは、次期以降の消費を全てゼロにした場合に返済可能な、今期の最大借り入れ額を表す。第 t 期までに historys^t が発生した場合の、第 i 個人の NDL を $A_t^i(s^t)$ とおくと、定義より

$$A_t^i(s^t) = y_t^i(s^t) + \sum_{s_{t+1}|s^t} A_{t+1}^i(s^{t+1}) Q_t(s_{t+1}|s^t). \tag{13}$$

但し、第一項は今期受け取れる endowment を、第二項は次期の NDL を次期に発生しうる state でウェイト付けし、今期の価格で評価したものを表す。

以下では、endowment $y_t^i(s^t)$ と Pricing kernel $Q_t(s_{t+1}|s^t)$ が Markov Process に従う時、NDL が今期の state のみに依存する、すなわち $A^i(s_t)$ と表すことができることを示す。

まず、上式を展開すると

$$\begin{aligned} A_t^i(s^t) &= y_t^i(s^t) + \sum_{s_{t+1}|s^t} A_{t+1}^i(s^{t+1}) Q_t(s_{t+1}|s^t) \\ &= y_t^i(s^t) + \sum_{s_{t+1}|s^t} \left(y_{t+1}^i(s^{t+1}) + \sum_{s_{t+2}|s^{t+1}} A_{t+2}^i(s^{t+2}) Q_{t+1}(s_{t+2}|s^{t+1}) \right) Q_t(s_{t+1}|s^t) \\ &= y_t^i(s^t) + \sum_{s_{t+1}|s^t} y_{t+1}^i(s^{t+1}) Q_t(s_{t+1}|s^t) + \sum_{s_{t+1}|s^t} \sum_{s_{t+2}|s^{t+1}} A_{t+2}^i(s^{t+2}) Q_{t+1}(s_{t+2}|s^{t+1}) Q_t(s_{t+1}|s^t). \end{aligned}$$

上記の作業を無限回繰り返すと

$$
\begin{aligned}
A_t^i(s^t) &= y_t^i(s^t) \\
&+ \sum_{s_{t+1}|s^t} y_{t+1}^i(s^{t+1}) Q_t(s_{t+1}|s^t) \\
&+ \sum_{s_{t+1}|s^t} \sum_{s_{t+2}|s^{t+1}} y_{t+2}^i(s^{t+2}) Q_t(s_{t+1}|s^t) Q_{t+1}(s_{t+2}|s^{t+1}) \\
&+ \cdots \\
&+ \lim_{T\to\infty} \sum_{s_{t+1}|s^t} \sum_{s_{t+2}|s^{t+1}} \cdots \sum_{s_{T-1}|s^{T-2}} \sum_{s_T|s^{T-1}} A_T^i(s^T) Q_t(s_{t+1}|s^t) \times \cdots \times Q_{T-1}(s_T|s^{T-1}). \qquad (14)
\end{aligned}
$$

ここで、

$$
\begin{aligned}
q_t^t(s^t) &= 1, \\
q_\tau^t(s^\tau) &= Q_t(s_{t+1}|s^t) \times Q_t(s_{t+2}|s^{t+1}) \times \cdots \times Q_{\tau-1}(s_\tau|s^{\tau-1}), \\
\sum_{s^\tau|s^t} y_\tau^i(s^\tau) &= \sum_{s_{t+1}|s^t} \sum_{s_{t+2}|s^{t+1}} \cdots \sum_{s_{\tau-1}|s^{\tau-2}} \sum_{s_\tau|s^{\tau-1}} y_\tau^i(s^\tau),
\end{aligned}
$$

と定義すると、上式は次のようにまとめられる。

$$
\begin{aligned}
A_t^i(s^t) &= y_t^i(s^t) \\
&+ \sum_{s^{t+1}|s^t} y_{t+1}^i(s^{t+1}) q_{t+1}^t(s^{t+1}) \\
&+ \sum_{s^{t+2}|s^t} y_{t+2}^i(s^{t+2}) q_{t+2}^t(s^{t+2}) \\
&+ \cdots \\
&+ \lim_{T\to\infty} \sum_{s^T|s^t} A_T^i(s^T) q_T^t(s^T) \\
&= \sum_{\tau=t}^{\infty} \sum_{s^\tau|s^t} y_\tau^i(s^\tau) q_\tau^t(s^\tau) + \lim_{T\to\infty} \sum_{s^T|s^t} A_T^i(s^T) q_T^t(s^T). \qquad (15)
\end{aligned}
$$

ここで、NDL も価格も必ず正なので、$\lim_{T\to\infty} \sum_{s^T|s^t} A_T^i(s^T) q_T^t(s^T) \geq 0$ である。しかし、もしも $\lim_{T\to\infty} \sum_{s^T|s^t} A_T^i(s^T) q_T^t(s^T) > 0$ ならば、これは無限期先においても負債を持つことが出来ることを意味し、Non-Ponzi game condition を満たさない。従って、合理的個人を仮定する以上は、$\lim_{T\to\infty} \sum_{s^T|s^t} A_T^i(s^T) q_T^t(s^T) = 0$ である。以上より、NDL は以下のように書き表せる (テキスト p.225 を参照)。

$$
A_t^i(s^t) = \sum_{\tau=t}^{\infty} \sum_{s^\tau|s^t} y_\tau^i(s^\tau) q_\tau^t(s^\tau). \qquad (16)
$$

この時、endowment はその期の state のみに依存すると仮定しているので、

$$
y_\tau^i(s^\tau) = y^i(s_\tau) \quad \forall \tau, s_\tau, \qquad (17)
$$

である。また、Pricing kernel は Markov process に従うと仮定しているので、

$$
\begin{aligned}
q_\tau^t(s^\tau) &= Q_t(s_{t+1}|s^t) \times Q_t(s_{t+2}|s^{t+1}) \times \cdots \times Q_{\tau-1}(s_\tau|s^{\tau-1}) \\
&= Q(s_{t+1}|s_t) \times Q(s_{t+2}|s_{t+1}) \times \cdots \times Q(s_\tau|s_{\tau-1}) \\
&= q_\tau^t(s_\tau), \qquad (18)
\end{aligned}
$$

と書き表すことができる。

以上より、(17) 式の NDL は

$$
A_t^i(s^t) = \sum_{\tau=t}^{\infty} \sum_{s^\tau|s_t} y^i(s_\tau) q_\tau^t(s_\tau) = A^i(s_t), \qquad (19)
$$

のように、history には依存せず、今期の statess_t にのみ依存すると結論づけられる。以下では NDL を $\bar{A}^i(s)$ と表す。

(2)

ADE と SME の消費の allocation は完全に一致する (テキスト 8.8.5. 節) ので、SME の消費の allocation は

$$
c_t^i(s^t) = u'^{-1}\left[\frac{\mu_i}{\mu_j} u'\left[c_t^j(s^t)\right]\right], \quad \forall t, s^t, \qquad (20)
$$

の様に表すこともできる (補論レジメ参照)。但し、$u(\cdot)$ は strictly concave かつ 2 回連続微分可能の瞬時効用関数であり、また、μ_i は第 i 個人の生涯予算制約にかかる Lagrange Multiplier である。ここで、資源制約式と各個人の endowment がその期の state のみに依存するという仮定より、

$$
\sum_i c_t^i(s^t) = \sum_i y_t^i(s_t) \equiv Y(s_t), \qquad (21)
$$

なので、

$$
\sum_i u'^{-1}\left[\frac{\mu_i}{\mu_j} u'\left[c_t^j(s^t)\right]\right] = Y(s_t), \quad \forall t, s^t, j \in I. \qquad (22)
$$

ここで μ_i と μ_j は共に定数なので、左辺にある変数は $c_t^j(s^t)$ のみである。更に右辺は今期の state s_t にのみ依存するので、

$$
c_t^j(s^t) = c^j(s_t), \quad \forall t, s_t, j \in I, \qquad (23)
$$

のように、全ての個人の消費は、今期の state s_t にのみ依存すると結論づけられる。

(3)

t 期の消費が t 期の state s_t にのみ依存することは、消費の平準化とは矛盾していない。何故ならば、各個人は Arrow sequrity を交換することによって、将来の不確実な history 間での消費の平準化

を行っているからである。即ち、各消費者は予め Arrow sequrity を交換しておくことによって、「所得が高い時」には自分の所得を他人に渡すかわりに、「所得が低い時」には他人から所得をもらえるように準備をしている。これは、消費の平準化に他ならない。

この下で、消費が今期の state のみに依存するのは次のような理由による。小問 (2) の答えより均衡においては

$$\sum_i u'^{-1}\left[\frac{\mu_i}{\mu_j}u'\left[c_t^j(s^t)\right]\right] = Y(s_t), \quad \forall t, s^t, j \in I, \tag{24}$$

が成立している。この時、もしも各個人の endowment は state に依存するが、aggregate endowment は state に依存しない、つまり

$$Y(s_t) = Y, \quad \forall s_t, \tag{25}$$

であると仮定すると、各個人の消費は常に一定、即ち

$$c^i(s_t) = \bar{c}^i, \quad \forall i \in I, \tag{26}$$

となることが分かる。即ち、均衡で発生する消費の変動は aggregate endowment の変動によってのみ発生するものであり、それは Arrow sequrity によっては share できない risk である。つまり、各個人は Arrow sequrity を交換することで「出来る限りの」消費の平準化を行っていることになる。以上より、t 期の消費が t 期の state s_t にのみ依存することは、消費の平準化には矛盾しない。

(4)

Bellman equation を用いると、第 i 個人の最適化問題は次のように記述される。

$$\begin{aligned}
&v^i(a,s) = \max_{c,\hat{a}(s')}\left\{u(c) + \beta\sum_{s'} v^i(\hat{a}(s'), s')\pi(s'|s)\right\},\\
&\text{s.t.}\\
&c + \sum_{s'}\hat{a}(s')Q(s'|s) \le y^i(s) + a \ (\text{予算制約}),\\
&-\hat{a}(s') \le A^i(s') \ \ \forall s' \ (\text{NDL}).
\end{aligned}$$

但し、$v^i(\cdot,\cdot)$ は value function、$\hat{a}(s')$ は state s' が発生した時に財を一単位受け取れる Arrow sequrity の購入量である。以下では、NDL は bind しないと仮定し、制約条件から外すことにする。

まず、$\hat{a}(s')$ についての f.o.c. を求める。予算制約式を用いて B.E. から c を消去すると

$$v^i(a,s) = \max_{\hat{a}(s')}\left\{u\left(y^i(s) + a - \sum_{s'}\hat{a}(s')Q(s'|s)\right) + \beta\sum_{s'} v^i(\hat{a}(s'), s')\pi(s'|s)\right\}. \tag{27}$$

Arrow sequrity の購入量に関する policy function を

$$\hat{a}(s') = g(a, s, s'), \quad \forall s', \tag{28}$$

と表すことにして、上記の B.E. の右辺の max operator の中を $\hat{a}(s')$ について微分してゼロとおくと、f.o.c. は

$$u_c\left(y^i(s)+a-\sum_{s'}g(a,s,s')Q(s'|s)\right)(-1)Q(s'|s)+\beta\frac{\partial v(g(a,s,s'),s')}{\partial\hat{a}(s')}\pi(s'|s)=0,\quad\forall s'\quad\text{(f.o.c.)}.\tag{29}$$

次に、B.S.C を求める。policy function $\hat{a}(s')=g(a,s,s')$ を B.E. に代入すると、max operator が外れて、

$$v^i(a,s)=u\left(y^i(s)+a-\sum_{s'}g(a,s,s')Q(s'|s)\right)+\beta\sum_{s'}v^i(g(a,s,s'),s')\pi(s'|s).\tag{30}$$

両辺を a について微分すると、envelope theorem より $g(a,s,s')$ に関する微分は考えなくてもよいので、以下の様に B.S.C. が求まる。

$$\frac{\partial v^i(a,s)}{\partial a}=u_c\left(y^i(s)+a-\sum_{s'}g(a,s,s')Q(s'|s)\right)\quad\text{(B.S.C.)}.\tag{31}$$

ここでは無限期問題を考えているので、stationarity より policy function の関数形は時間を通じて一定となる。従って、B.S.C. を一期ずらしたものは

$$\frac{\partial v(g(a,s,s'),s')}{\partial\hat{a}(s')}=u_c\left(y^i(s')+g(a,s,s')-\sum_{s''}g\left(g(a,s,s'),s',s''\right)Q(s''|s')\right).\tag{32}$$

最後に、B.S.C. を f.o.c. に代入して、value function が入っている項を消去すると、以下の様に Euler equation が求まる。

$$\begin{aligned}Q(s'|s)&=\frac{\beta u_c\left(y^i(s')+g(a,s,s')-\sum_{s''}g\left(g(a,s,s'),s',s''\right)Q(s''|s')\right)\pi(s'|s)}{u_c\left(y^i(s)+a-\sum_{s'}g(a,s,s')Q(s'|s)\right)}\\&=\frac{\beta u_c\left(h^i(g(a,s,s'),s')\right)}{u_c\left(h^i(a,s)\right)}\pi(s'|s)\quad\text{(Euler equation)}.\end{aligned}\tag{33}$$

(5)

今期、NDL が bind していないことを所与として、均衡において次期の NDL が bind すると仮定して矛盾を導く。

まず、今期の NDL が bind していない時には、今期の消費は必ず厳密に正である。何故ならば、瞬時効用関数は inada condition を満たすので、もしも今期の消費がゼロならば、もっと Arrow sequrity を発行することによって消費を正にすることで、無限大の限界効用を得ることができるからである。

ここで、均衡において次期の NDL が bind する、即ち

$$a'=-A^i(s'),\tag{34}$$

であると仮定する。この時、次期の予算制約式

$$c' = y^i(s') + a' - \sum_{s''} \hat{a}(s'')Q(s''|s'), \tag{35}$$

に代入すると、

$$c' = y^i(s') - A^i(s') - \sum_{s''} \hat{a}(s'')Q(s''|s'). \tag{36}$$

ここで、NDL の定義より

$$A^i(s') = y^i(s') + \sum_{s''} A^i(s'')Q(s''|s'), \tag{37}$$

なので、上式は以下の様に書き換えられる。

$$c' = -\sum_{s''} \left\{ A^i(s'') + \hat{a}(s'') \right\} Q(s''|s'). \tag{38}$$

ここで、次期の NDL より $A^i(s'') + \hat{a}(s'') \geq 0$、消費の非負制約より $c' \geq 0$、また、Pricing kernel は必ず正なので $Q(s''|s') \geq 0$ である。従って上の式より、これらの 3 つの条件を満たすには

$$c' = 0, \tag{39}$$

が成立しなくてはならない。同様の論法より、これは更に先の期についても同様に成立しなくてはならないので、もしも次期の NDL が bind するのならば、次期以降の全ての期、全ての history において消費はゼロにならなくてはならない。

しかし最初の仮定より今期の NDL は bind しておらず、更に今期の消費は厳密に正である。従って、今期の消費を一単位減らして次期以降の消費に充てると、今期の負の限界効用は有限であるのに対して、次期以降のある期、ある history での正の限界効用は無限大である。すなわち、この消費者は効用の裁定によって生涯効用を高くする機会を持っていることになる。これは、消費者が最適な行動をとっているという仮定に矛盾する。

以上より、もしも今期の NDL が bind していないのならば、次期の NDL も bind しないということが示された。

Exercise 8.4.II

(f)

まず、代表的個人が直面する最大化問題を

$$
\begin{aligned}
&v(a,\lambda) = \max_{c,\hat{a}(\lambda')} \left\{ u(c) + \beta \sum_{\lambda'} v(\hat{a}(\lambda'),\lambda')\pi(\lambda'|\lambda) \right\}, \quad \text{(B.E.)},\\
&\text{s.t.}\\
&c + \sum_{\lambda'} \hat{a}(\lambda')\tilde{Q}(\lambda'|\lambda) \le d + a, \quad (\text{予算制約}),\\
&c \ge 0, \quad (\text{消費の非負制約}),\\
&-\hat{a}(\lambda') \le \bar{A}(\lambda'), \quad \forall\lambda', \quad \text{(NDL)},
\end{aligned}
$$

と表す。但し、$\hat{a}(\lambda')$ は state λ' が実現した時に財を一単位受け取ることができる Arrow sequrity の購入量、$\bar{A}(\lambda')$ は Natural debt limit である。以下では、消費に関する policy function を $h(a,\lambda)$、Arrow sequrity の保有量に関する policy function を $g(a,\lambda,\lambda')$ と表す。

この時、Recursive Competitive equilibrium とは、以下の 2 つの性質を満たすような、Arrow sequrity の初期保有量 $\mathbf{a}_0$、Pricing kernel $Q(\lambda'|\lambda)$、value function $v(a,\lambda)$[1]、及び policy function $\{h(a,\lambda), g(a,\lambda,\lambda')\}$ のことである。

(1) 代表的個人は Arrow sequrity の初期保有量 $\mathbf{a}_0$ と Pricing kernel $Q(\lambda'|\lambda)$ を given として、上記の最大化問題を解いている。即ち、

$$
\begin{aligned}
&c_t = h(a_t,\lambda_t), \quad \forall t,\lambda_t,\\
&a_{t+1}(\lambda_{t+1}) = g(a_t,\lambda_t,\lambda_{t+1}), \quad \forall t,\lambda_t,\lambda_{t+1}.
\end{aligned}
$$

が成立している。

(2) 全ての state の sequence $\{\lambda_t\}_{t=0}^{\infty}$ に対して、(1) の policy function によって表される消費と Arrow sequrity の保有量は、資源制約と資産市場の均衡条件を満たす。つまり、

$$
\begin{aligned}
&h(a_t,\lambda_t) = d_t, \quad \forall t,\lambda_t,\\
&g(a_t,\lambda_t,\lambda_{t+1}) = 0, \quad \forall t,\lambda_t,\lambda_{t+1},
\end{aligned}
$$

が成立している。

(g)

問題 2-(1) で示したように、NDL は次の様に表される。

$$
\bar{A}(\lambda_t) = \sum_{\tau=t}^{\infty} \sum_{\lambda_\tau|\lambda_t} d(\lambda^\tau)\tilde{q}_\tau^t(\lambda^\tau), \quad \forall\lambda^\tau, \tag{40}
$$

[1] ここでは代表的個人を考えているので、agent index は省略している。

ただし、

$$\tilde{q}_\tau^t(\lambda^\tau) = \tilde{Q}(\lambda_\tau|\lambda_{\tau-1})\cdots\tilde{Q}(\lambda_{t+1}|\lambda_t), \tag{41}$$

である。

次に、Pricing kernel を消去するために、消費者の Euler equation を求める。消費者が t 期に直面する最大化問題は[2]

$$\max_{\{c_\tau(\lambda^\tau)\}_{\tau=0}^{\infty}} \sum_{\tau=t}^{\infty}\sum_{\lambda^\tau}\beta^{\tau-t}u\left[c_\tau(\lambda^\tau)\right]\pi(\lambda^\tau|\lambda_t), \tag{42}$$

$$\text{s.t.} \tag{43}$$

$$c_\tau(\lambda^\tau) + \sum_{\lambda^{\tau+1}} a_{\tau+1}(\lambda^{\tau+1})\tilde{Q}(\lambda_{\tau+1}|\lambda_\tau) \le d_\tau(\lambda^\tau) + a_\tau(\lambda^\tau), \quad \forall\tau, \tag{44}$$

$$-a_{\tau+1}(\lambda^{\tau+1}) \le A(\lambda_{\tau+1}), \quad \forall\tau, \lambda^\tau, \lambda_{\tau+1}. \tag{45}$$

Lagrangian を L、τ 期、λ^τ の下での予算制約に関する Lagrange Multiplier を $\eta_\tau(\lambda^\tau)$ とおくと、

$$\begin{aligned} L &= \sum_{\tau=t}^{\infty}\sum_{\lambda^\tau}\beta^{\tau-t}u\left[c_\tau(\lambda^\tau)\right]\pi(\lambda^\tau|\lambda_t) \\ &\quad + \sum_{\tau=t}^{\infty}\sum_{\lambda^\tau}\eta_\tau(\lambda^\tau)\left\{d_\tau(\lambda^\tau) + a_\tau(\lambda^\tau) - c_\tau(\lambda^\tau) - \sum_{\lambda^{\tau+1}} a_{\tau+1}(\lambda^{\tau+1})\tilde{Q}(\lambda_{\tau+1}|\lambda_\tau)\right\}. \end{aligned} \tag{46}$$

但し、瞬時効用関数は CRRA 型なので Inada condition を満たす。従って、NDL は bind しないので制約条件から外している。この時、$c_\tau(\lambda^\tau)$ と $a_{\tau+1}(\lambda^{\tau+1})$ に関する f.o.c. は、それぞれ以下の様になる。

$$\beta^{\tau-t}u_c\left[c_\tau(\lambda^\tau)\right]\pi(\lambda^\tau|\lambda_t) = \eta_\tau(\lambda^\tau), \quad \forall\tau, \lambda^\tau, \tag{47}$$

$$\eta_{\tau+1}(\lambda^{\tau+1}) = \eta_\tau(\lambda^\tau)\tilde{Q}(\lambda_{\tau+1}|\lambda_\tau), \quad \forall\tau, \lambda^\tau, \lambda^{\tau+1}. \tag{48}$$

上記の 2 式をまとめると、

$$\tilde{Q}(\lambda_{\tau+1}|\lambda_\tau) = \beta\frac{u_c\left[c_{\tau+1}(\lambda^{\tau+1})\right]}{u_c\left[c_\tau(\lambda^\tau)\right]}\pi(\lambda^{\tau+1}|\lambda_\tau) = \beta\left[\frac{c_{\tau+1}(\lambda^{\tau+1})}{c_\tau(\lambda^\tau)}\right]^{-\gamma}\pi(\lambda^{\tau+1}|\lambda_\tau), \quad \forall\lambda_\tau, \lambda_{\tau+1}. \tag{49}$$

ここで、資源制約式より $c_\tau(\lambda^\tau) = d(\lambda^\tau),\ \forall\tau \ge t$。また、state は Markov process に従うため、$\pi(\lambda^{\tau+1}|\lambda_\tau) = \pi(\lambda_{\tau+1}|\lambda_\tau)$ である。また、与えられた endowment process より、$d(\lambda^\tau) = \lambda_\tau\cdots\lambda_{t+1}d(\lambda_t)$ なので、

$$\begin{aligned} \tilde{Q}(\lambda_{\tau+1}|\lambda_\tau) &= \beta\left[\frac{d_{\tau+1}(\lambda^{\tau+1})}{d_\tau(\lambda^\tau)}\right]^{-\gamma}\pi(\lambda_{\tau+1}|\lambda_\tau) = \beta\left[\frac{\lambda_{\tau+1}\cdots\lambda_{t+1}d_t(\lambda^t)}{\lambda_\tau\cdots\lambda_{t+1}d_t(\lambda^t)}\right]^{-\gamma}\pi(\lambda_{\tau+1}|\lambda_\tau) \\ &= \beta\lambda_{\tau+1}^{-\gamma}\pi(\lambda_{\tau+1}|\lambda_\tau), \quad \forall\lambda_\tau, \lambda_{\tau+1}, \end{aligned} \tag{50}$$

[2] ここでは DP ではなく、Lagrangian を用いた方が問題を解きやすいため、通常の最大化問題を定式化する。

のように Euler equation が求まる。よって、

$$\begin{aligned}\tilde{q}_\tau^t(\lambda^\tau) &= \tilde{Q}(\lambda_\tau|\lambda_{\tau-1})\cdots\tilde{Q}(\lambda_{t+1}|\lambda_t)\\ &= \beta^{\tau-t}\left[\lambda_\tau\lambda_{\tau-1}\cdots\lambda_{t+1}\right]^{-\gamma}\pi(\lambda_\tau|\lambda_{\tau-1})\cdots\pi(\lambda_{t+1}|\lambda_t)\\ &= \beta^{\tau-t}\left[\lambda_\tau\lambda_{\tau-1}\cdots\lambda_{t+1}\right]^{-\gamma}\pi(\lambda^\tau|\lambda_t). \end{aligned}\tag{51}$$

以上より、NDL は以下の様に表される。

$$\bar{A}(\lambda_t) = \sum_{\tau=t}^{\infty}\sum_{\lambda_\tau|\lambda_t} d_\tau(\lambda^\tau)\beta^{\tau-t}\left[\lambda_\tau\lambda_{\tau-1}\cdots\lambda_{t+1}\right]^{-\gamma}\pi(\lambda^\tau|\lambda_t), \quad \forall\lambda^\tau. \tag{52}$$

(h)

まず、(g) の問題で求めた f.o.c. より、任意の $\tau \geq t$ 期における pricing kernel は

$$\begin{aligned}\tilde{Q}(\lambda_{\tau+1}|\lambda_\tau) &= \beta\lambda_{\tau+1}^{-\gamma}\pi(\lambda_{\tau+1}|\lambda_\tau)\\ &= (0.95)\lambda_{\tau+1}^{-2}\pi(\lambda_{\tau+1}|\lambda_\tau), \quad \forall\lambda_\tau,\lambda_{\tau+1}.\end{aligned}\tag{53}$$

また、資源制約より

$$c_\tau(\lambda^\tau) = d_\tau(\lambda^\tau) = \lambda_\tau\lambda_{\tau-1}\cdots\lambda_1, \quad \forall\lambda^\tau. \tag{54}$$

最後に、ここでは代表的個人を考えているので、資産市場の均衡条件式より

$$a_{\tau+1}(\lambda^{\tau+1}) = 0, \quad \forall\lambda^{\tau+1}. \tag{55}$$

以上より、Competitive equilibrium は以下の 3 つで特徴付けられる。

$$\tilde{Q}(\lambda_{\tau+1}|\lambda_\tau) = (0.95)\lambda_{\tau+1}^{-2}\pi(\lambda_{\tau+1}|\lambda_\tau), \quad \forall\lambda_\tau,\lambda_{\tau+1}, \tag{56}$$

$$c_\tau(\lambda^\tau) = \lambda_\tau\lambda_{\tau-1}\cdots\lambda_1, \quad \forall\lambda^\tau, \tag{57}$$

$$a_{\tau+1}(\lambda^{\tau+1}) = 0, \quad \forall\lambda^{\tau+1}. \tag{58}$$

(i)

2 期後に確実に 1 単位の財を受け取ることができる claim(安全資産) の t 期における価格を $p(\lambda_t = \bar{\lambda}_i)$, $i = 1, 2$ と表す。この時、裁定条件より、この claim の価格は 2 期後までにどのような history が実現しても財を一単位受けとれるように、Arrow sequrity を購入しておく為にかかる費用と完全に一致する。

ここで、テキスト p.235 の (8.10.3) より、$\lambda_t = \bar{\lambda}_j$ を given とした下での、$(t+2)$ 期に state $\lambda_{t+2} = \bar{\lambda}_i$ が実現したのならば財を 1 単位受け取ることのできる 2-step Arrow sequrity の t 期における価格は

$$
\begin{aligned}
\tilde{Q}_2(\lambda_{t+2}=\bar{\lambda}_i|\lambda_t=\bar{\lambda}_j) &= \sum_{\lambda_{t+1}} \tilde{Q}(\lambda_{t+2}=\bar{\lambda}_i|\lambda_{t+1})\tilde{Q}(\lambda_{t+1}|\lambda_t=\bar{\lambda}_j) \\
&= \tilde{Q}(\lambda_{t+2}=\bar{\lambda}_i|\lambda_{t+1}=\bar{\lambda}_1)\tilde{Q}(\lambda_{t+1}=\bar{\lambda}_1|\lambda_t=\bar{\lambda}_j) \\
&\quad +\tilde{Q}(\lambda_{t+2}=\bar{\lambda}_i|\lambda_{t+1}=\bar{\lambda}_2)\tilde{Q}(\lambda_{t+1}=\bar{\lambda}_2|\lambda_t=\bar{\lambda}_j) \\
&= \left\{(0.95)(\bar{\lambda}_i)^{-2}\pi(\lambda_{t+2}=\bar{\lambda}_i|\lambda_{t+1}=\bar{\lambda}_1)\times(0.95)(\bar{\lambda}_1)^{-2}\pi(\lambda_{t+1}=\bar{\lambda}_1|\lambda_t=\bar{\lambda}_j)\right\} \\
&\quad +\left\{(0.95)(\bar{\lambda}_i)^{-2}\pi(\lambda_{t+2}=\bar{\lambda}_i|\lambda_{t+1}=\bar{\lambda}_2)\times(0.95)(\bar{\lambda}_2)^{-2}\pi(\lambda_{t+1}=\bar{\lambda}_2|\lambda_t=\bar{\lambda}_j)\right\}.
\end{aligned}
$$

従って、

$$
\begin{aligned}
\tilde{Q}_2(\lambda_{t+2}=\bar{\lambda}_1|\lambda_t=\bar{\lambda}_1) &= \left\{(0.95)(0.97)^{-2}0.8\times(0.95)(0.97)^{-2}0.8\right\} \\
&\quad +\left\{(0.95)(0.97)^{-2}0.1\times(0.95)(1.03)^{-2}0.2\right\} \\
&= 0.6705, \qquad (59) \\
\tilde{Q}_2(\lambda_{t+2}=\bar{\lambda}_2|\lambda_t=\bar{\lambda}_1) &= \left\{(0.95)(1.03)^{-2}0.2\times(0.95)(0.97)^{-2}0.8\right\} \\
&\quad +\left\{(0.95)(1.03)^{-2}0.9\times(0.95)(1.03)^{-2}0.2\right\} \\
&= 0.2890, \qquad (60) \\
\tilde{Q}_2(\lambda_{t+2}=\bar{\lambda}_1|\lambda_t=\bar{\lambda}_2) &= \left\{(0.95)(0.97)^{-2}0.8\times(0.95)(0.97)^{-2}0.1\right\} \\
&\quad +\left\{(0.95)(0.97)^{-2}0.1\times(0.95)(1.03)^{-2}0.9\right\} \\
&= 0.1629, \qquad (61) \\
\tilde{Q}_2(\lambda_{t+2}=\bar{\lambda}_2|\lambda_t=\bar{\lambda}_2) &= \left\{(0.95)(1.03)^{-2}0.2\times(0.95)(0.97)^{-2}0.1\right\} \\
&\quad +\left\{(0.95)(1.03)^{-2}0.9\times(0.95)(1.03)^{-2}0.9\right\} \\
&= 0.6676. \qquad (62)
\end{aligned}
$$

上記の 4 つの式と裁定条件より、claim の価格は次のように求められる。

$$
\begin{aligned}
p(\lambda_t=\bar{\lambda}_1) &= \tilde{Q}_2(\lambda_{t+2}=\bar{\lambda}_1|\lambda_t=\bar{\lambda}_1)+\tilde{Q}_2(\lambda_{t+2}=\bar{\lambda}_2|\lambda_t=\bar{\lambda}_1) \\
&= 0.9595, \qquad (63) \\
p(\lambda_t=\bar{\lambda}_2) &= \tilde{Q}_2(\lambda_{t+2}=\bar{\lambda}_1|\lambda_t=\bar{\lambda}_2)+\tilde{Q}_2(\lambda_{t+2}=\bar{\lambda}_2|\lambda_t=\bar{\lambda}_2) \\
&= 0.8305. \qquad (64)
\end{aligned}
$$

Exercise 8.5

(a)

State s_t は Markov process に従うので、history $s^t=(s_0,s_1,\cdots,s_t)$ の生起確率は

$$\pi_t(s^t)=\pi(s_t|s_{t-1})\pi(s_{t-1}|s_{t-2})\cdots\pi(s_1|s_0)\pi(s_0). \qquad (65)$$

(b$_1$)

Plannning problem

$$\max_{c^1, c^2} \quad \left\{ \theta U(c^1) + (1-\theta) U(c^2) \right\}, \tag{66}$$

$$\text{s.t.} \quad c_t^1(s^t) + c_t^2(s^t) \leq Y(s^t). \tag{67}$$

Lagrangian を L、t 期、history s^t の制約条件に掛かる Lagrangian Multiplier を $\lambda_t(s^t)$ とおくと

$$L = \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t} \left[\beta^t \left\{ \theta \ln(c_t^1(s^t)) + (1-\theta) \ln(c_t^2(s^t)) \right\} \pi_t(s^t) + \lambda_t(s^t) \left\{ Y(s_t) - c_t^1(s^t) - c_t^2(s^t) \right\} \right], \tag{68}$$

この時、f.o.c. は以下の様に求まる。

$$\beta^t \frac{\theta \pi_t(s^t)}{c_t^1(s^t)} = \lambda_t(s^t), \quad \beta^t \frac{(1-\theta)\pi_t(s^t)}{c_t^2(s^t)} = \lambda_t(s^t), \quad \text{for all } t,\ s^t. \tag{69}$$

よって、

$$\frac{c_t^2(s^t)}{c_t^1(s^t)} = \frac{1-\theta}{\theta}. \tag{70}$$

これと制約条件式より、

$$c_t^1(s^t) = \theta Y(s_t), \quad c_t^2(s^t) = (1-\theta) Y(s_t), \quad \text{for all } t,\ s^t. \tag{71}$$

これが、Pareto weight $\theta \in (0,1)$ に対する Pareto problem の解である。

(b$_2$)

Arrow-Debreu 経済の Competitive equilibrium とは、以下の 2 つを満たす、消費者の消費配分 $c^i = \{c_t^i(s^t)\}_{t=0}^{\infty}$ $(i = 1,\ 2)$ と Arrow-Debreu sequrity の price system $\{q_t^0(s^t)\}_{t=0}^{\infty}$ のことを指す。

(1) 消費配分 $\{c_t^i(s^t)\}_{t=0}^{\infty}$ は Price system $\{q_t^0(s^t)\}_{t=0}^{\infty}$ を所与として、消費者が最適に選択したものである。

(2) 消費配分が feasible である。すなわち、

$$c_t^1(s^t) + c_t^2(s^t) = Y(s_t), \quad \text{for all } t,\ s^t, \tag{72}$$

を満たしている。

(c)
まず、消費者の効用最大化問題について考える。第 i 個人の効用最大化問題は以下の様に記述される。

$$\max_{\{c_t^i(s^t)\}_{t=0}^{\infty}} \quad \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t} \beta^t \ln \left[c_t^i(s^t) \right] \pi_t(s^t), \tag{73}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t} q_t^0(s^t) c_t^i(s^t) \leq \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t} q_t^0(s^t) y_t^i(s^t). \tag{74}$$

Lagrangian を L、制約条件にかかる Lagrange Multiplier を μ_i とおくと

$$L = \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t} \beta^t \ln \left[c_t^i(s^t) \right] \pi_t(s^t) + \mu_i \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t} \left[q_t^0(s^t) y_t^i(s^t) - q_t^0(s^t) c_t^i(s^t) \right]. \tag{75}$$

この時、f.o.c. は以下の様に求まる。

$$\beta^t \frac{1}{c_t^i(s^t)} \pi_t(s^t) = \mu_i q_t^0(s^t), \quad \text{for all } t,\ s^t. \tag{76}$$

この f.o.c. の 0 期のものについて、$q_0^0(s^0) = 1,\ \pi(s^0) = 1$ を用いると、

$$\mu_i = \frac{1}{c_0^i(s^0)}. \tag{77}$$

これを任意の t 期、history s^t の f.o.c. (76) に代入することで

$$q_t^0(s^t) = \frac{\beta^t \pi_t(s^t) c_0^i(s^0)}{c_t^i(s^t)}, \quad \text{for all } t,\ s^t. \tag{78}$$

　また、ここで f.o.c. (76) を $i = 1, 2$ についての比を取ると、

$$\frac{c_t^2(s^t)}{c_t^1(s^t)} = \frac{\mu_1}{\mu_2}. \tag{79}$$

これを (72) の資源制約式に代入することで、

$$c_t^1(s^t) = \frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} Y(s_t), \quad c_t^2(s^t) = \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} Y(s_t), \quad \text{for all } t,\ s^t. \tag{80}$$

この時、(80) 式より $i = 1, 2$ のどちらを用いても

$$\frac{c_0^i(s^0)}{c_t^i(s^t)} = \frac{Y(s_0)}{Y(s_t)}, \tag{81}$$

となっていることに注意する。これを (78) に代入することで、competitive equilibrium における price system は、以下のように得られる。

$$q_t^0(s^t) = \frac{\beta^t \pi_t(s^t) Y(s_0)}{Y(s_t)}, \quad \text{for all } t,\ s^t. \tag{82}$$

(d)

問題 (b_1) より、Pareto problem の解においては、ある Pareto weight $\theta \in (0,1)$ に対して消費の allocation が

$$\frac{c_t^2(s^t)}{c_t^1(s^t)} = \frac{1-\theta}{\theta}, \quad \text{for all } t,\ s^t, \tag{83}$$

を満たしている。また、問題 (c) より、competitive equilibrium における消費の allocation は

$$\frac{c_t^2(s^t)}{c_t^1(s^t)} = \frac{\mu_1}{\mu_2}, \quad \text{for all } t,\ s^t, \tag{84}$$

という関係を満たしている。

従って、competitive equilibrium における消費の allocation は、Pareto weight θ を

$$\frac{1-\theta}{\theta} = \frac{\mu_1}{\mu_2}, \tag{85}$$

となるように設定したときの Pareto problem の解であり、すなわち、Arrow-Debreu 経済における competitive equilibrium は Pareto optimal な配分を達成していることが分かる (厚生経済学の第 1 定理)。

次に、任意の Pareto optimal な配分 (すなわち、任意の $\theta \in (0,1)$ に対しての Pareto problem の解) を endowment の再配分によって、Competitive equilibrium の解として達成できるか、という問題を考える。

(78) 式より、競争均衡においては必ず

$$c_t^i(s^t)q_t^0(s^t) = \beta^t \pi_t(s^t) c_0^i(s^0), \quad \text{for all } t,\ s^t, \tag{86}$$

となっている。これを予算制約に代入すると

$$\begin{aligned} c_0^i(s^0)\sum_{t=0}^{\infty}\sum_{s^t}\beta^t\pi_t(s^t) &= \sum_{t=0}^{\infty}\sum_{s^t} q_t^0(s^t)y_t^i(s^t), \\ \Rightarrow \qquad c_0^i(s^0) &= \frac{\sum_{t=0}^{\infty}\sum_{s^t} q_t^0(s^t)y_t^i(s^t)}{\sum_{t=0}^{\infty}\sum_{s^t}\beta^t\pi_t(s^t)}. \end{aligned} \tag{87}$$

また、(77) より各主体の Lagrange Multiplier μ_i は $c_0^i(s^0)$ の逆数なので

$$\mu_i = \frac{1}{c_0^i(s^0)} = \frac{\sum_{t=0}^{\infty}\sum_{s^t}\beta^t\pi_t(s^t)}{\sum_{t=0}^{\infty}\sum_{s^t} q_t^0(s^t)y_t^i(s^t)}. \tag{88}$$

この μ_i の $i = 1, 2$ についての比を取ると、

$$\frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{\sum_{t=0}^{\infty}\sum_{s^t} q_t^0(s^t)y_t^2(s^t)}{\sum_{t=0}^{\infty}\sum_{s^t} q_t^0(s^t)y_t^1(s^t)}, \tag{89}$$

となっていることが分かる[3]。すなわち、μ_1 と μ_2 の比は、Aggregate endowment の中で、各主体の endowment がどれだけを占めるかによって決まっている[4]。つまり、任意の $\theta \in (0,1)$ に対する Pareto problem の解は、各主体の endowment を適当に配分しなおすことで、(μ_1 と μ_2 の比を調整することで) competitive equilibrium の allocation として達成可能である (厚生経済学の第 2 定理)。

(e)

前問までの議論により、competitive equilibrium における資源配分は、ある Pareto weight、$\theta \in (0,1)$ に対する Pareto problem の解となっていることを利用する。

(78) 式より、均衡価格は

$$q_t^0(s^t) = \frac{\beta^t \pi_t(s^t) c_0^i(s^0)}{c_t^i(s^t)} = \frac{\partial U / \partial c_t^i(s^t)}{\partial U / \partial c_0^i(s^0)}, \tag{90}$$

と、$c_t^i(s^t)$ と $c_0^i(s^0)$ の間の限界代替率で決定されていることが分かる。

ところが、Pareto problem の解においては、(71) より、任意の主体について

$$\frac{c_0^i(s^0)}{c_t^i(s^t)} = \frac{Y(s_0)}{Y(s_t)}, \tag{91}$$

となっていることから、Pareto problem の解における各主体の限界代替率は、あたかも経済の中に aggregate endowment を全て消費する一人の消費者 (代表的個人) しかいないと考えたときの、代表的個人の限界代替率と等しい。(代表的個人の選好は各個人の選好と同じものであるとする。)

すなわち、各主体の均衡消費配分を具体的に求めることなく、均衡価格は代表的個人の限界代替率に aggregate endowment を代入したもの、

$$q_t^0(s^t) = \frac{\beta^t \pi_t(s^t) Y(s_0)}{Y(s_t)}, \tag{92}$$

で求めることができる。

問題 (f) 以降の設定について

本問では、各期の aggregate endowment は当該期の state にのみ依存しており、従って、Arrow-Debreu 均衡における各期の各個人の消費も、当該期の state にのみ依存することになる[5]。また、講義で解説されたとおり、Arrow-Debreu 均衡 (ADE) と Sequential market 均衡 (SME) は同じ消費配分を与える。これと、state が Markov process に従っているという仮定により、SME における Arrow sequrity の価格 (pricing kernel) は、

$$\widetilde{Q}(s_{t+1}|s^t) = \beta \frac{u'(c^i(s_{t+1}))}{u'(c^i(s_t))} \pi(s_{t+1}|s_t) = Q(s_{t+1}|s_t), \tag{93}$$

[3] μ_i はミクロ経済学で言うところの所得の限界効用を表す。たとえば、aggregate endowment の流列の中で主体 2 のほうが相対的に多くの endowment を受け取っているとすると、均衡において主体 2 のほうが多くの消費を出来ることになり、主体 2 の所得の限界効用が相対的に低くなる。

[4] Aggregate endowment の中での各主体の endowment の配分が変えられたとしても、Aggregate endowment 自体が変わらなければ、今の問題の場合、(82) より、Arrow-Debreu sequrity の価格は変わらないことに注意。

[5] これは講義で解説されたとおり、ADE における消費配分は aggregate endowment のみに依存する、という性質による。

のように、history に依存しない形で表せる。さらに、前問までの結果より、

$$\frac{u'(c^i(s_{t+1}))}{u'(c^i(s_t))} = \frac{c^i(s_t)}{c^i(s_{t+1})} = \frac{Y(s_t)}{Y(s_{t+1})}, \tag{94}$$

となっていることから、pricing kernel は、

$$Q(s_{t+1}|s_t) = \frac{\beta Y(s_t)\pi(s_{t+1}|s_t)}{Y(s_{t+1})}, \tag{95}$$

と表せる。

以降の問題では、これを用いる。

(f)

Recursive competitive equilibrium (RCE) とは、初期資産 a^i、各期の消費と Arrow sequrity の購入量についての (history とは独立な) decision rule, $c_t^i = h^i(a,s)$, $a_{t+1}^i(s') = g^i(a,s,s')$, $(i = 1, 2)$、(history と独立な) pricing kernel $\widetilde{Q}(s'|s)$ が以下の 2 つを満たしている状態のことを言う。

(1) 消費と資産保有量についての decision rule が、初期資産と pricing kernel を所与とした各主体の最適化問題の解となっている。

(2) 全ての $\{s_t\}_{t=0}^{\infty}$ の実現値について、各主体の decision rule に基づく配分のもとで財市場と資産市場が均衡している。

Natural borrowing limit $A_t^i(s^t)$ は、t 期以降の消費を全てゼロにすることにより、endowment を全て返済に充てる、返済可能な最大額である。ここで、

$$\begin{aligned}\tilde{q}_\tau^t(s^\tau) &= \widetilde{Q}_t(s_{t+1}|s^t)\widetilde{Q}_{t+1}(s_{t+2}|s^{t+1})\cdots\widetilde{Q}_{\tau-1}(s_\tau|s_{\tau-1}) \\ &= Q(s_{t+1}|s_t)Q(s_{t+2}|s_{t+1})\cdots Q(s_\tau|s_{\tau-1}),\end{aligned} \tag{96}$$

と置くと、τ 期、history s^τ における endowment $y_\tau^i(s^\tau)$ の t 期における価値は、$y_\tau^i(s^\tau)\tilde{q}_\tau^t(s^\tau)$ で与えられる。従って、Natural borrowing limit は

$$A_t^i(s^t) = \sum_{\tau=t}^{\infty}\sum_{s^\tau|s^t} y_\tau^i(s^\tau)\tilde{q}_\tau^t(s^\tau), \tag{97}$$

で与えられる。ここで、前述したように、現在の設定では state は Markov Process に従っており、

endowment や Pricing kernel は history に依存しないので、NDL も history に依存しない形、

$$
\begin{aligned}
A^i(s_t) &= \sum_{\tau=t}^{\infty} \sum_{s^\tau|s_t} y^i_\tau(s_\tau)\tilde{q}^t_\tau(s^\tau) \\
&= \sum_{\tau=t}^{\infty} \sum_{s^\tau|s_t} y^i_\tau(s_\tau) Q_t(s_{t+1}|s_t) Q_{t+1}(s_{t+2}|s_{t+1}) \cdots Q_{\tau-1}(s_\tau|s_{\tau-1}) \\
&= \sum_{\tau=t}^{\infty} \sum_{s^\tau|s_t} y^i_\tau(s_\tau) \frac{\beta Y(s_t)\pi(s_{t+1}|s_t)}{Y(s_{t+1})} \frac{\beta Y(s_{t+1})\pi(s_{t+2}|s_{t+1})}{Y(s_{t+2})} \cdots \frac{\beta Y(s_{\tau-1})\pi(s_\tau|s_{\tau-1})}{Y(s_\tau)} \\
&= \sum_{\tau=t}^{\infty} \sum_{s^\tau|s_t} y^i_\tau(s_\tau) \frac{\beta^{\tau-t} Y(s_t)\pi(s_\tau|s_{\tau-1}) \cdots \pi(s_{t+2}|s_{t+1})\pi(s_{t+1}|s_t)}{Y(s_\tau)} \\
&= \sum_{\tau=t}^{\infty} \sum_{s^\tau|s_t} y^i_\tau(s_\tau) \frac{\beta^{\tau-t} Y(s_t)\pi(s^\tau|s_t)}{Y(s_\tau)},
\end{aligned}
\tag{98}
$$

のように表せる。

ちなみに、NDL が history に依存していないということから、

$$
\begin{aligned}
A^i(\bar{s}_1) &= y^i(\bar{s}_1) + \sum_{s_{t+1}} Q(s_{t+1}|\bar{s}_1) A^i(s_{t+1}), \\
A^i(\bar{s}_2) &= y^i(\bar{s}_2) + \sum_{s_{t+1}} Q(s_{t+1}|\bar{s}_2) A^i(s_{t+1}),
\end{aligned}
$$

という連立方程式を解くことで NDL を計算することも可能である。ただし、Pricing Kernel は (96) 式で与えられているものを用いる。

(g)

State s_t における、次期の state s_{t+1} についての Arrow security の価格は消費者の効用最大化の f.o.c. より

$$
Q(s_{t+1}|s_t) = \beta \frac{c^i(s_t)}{c^i(s_{t+1})} \pi(s_{t+1}|s_t), \tag{99}
$$

を満たしている。ここで、Arrow-Debreu 均衡と sequential market 均衡の消費配分が一致していること、さらに、Arrow-Debreu 均衡の消費配分は Pareto problem の解であることを用いて、(71) を代入すると、Arrow security の価格は

$$
Q(s_{t+1}|s_t) = \beta \frac{Y(s_t)}{Y(s_{t+1})} \pi(s_{t+1}|s_t), \tag{100}
$$

のように計算できることが分かる。

この Arrow security は、発行される期の state が 2 種類で、それらに対して、その次の期に生起しうる state が 2 種類なので、全部で 4 種類存在することになる。$Y(s_t = \bar{s}_1) = 1$, $Y(s_t = \bar{s}_2)$ を用いる

と、これら 4 種類の Arrow security の価格は、

$$Q(s_{t+1}=\bar{s}_1|s_t=\bar{s}_1)=\beta\frac{Y(s_t=\bar{s}_1)}{Y(s_{t+1}=\bar{s}_1)}\pi(s_{t+1}=\bar{s}_1|s_t=\bar{s}_1)=0.95\times 1\times 0.8=0.760, \tag{101}$$

$$Q(s_{t+1}=\bar{s}_2|s_t=\bar{s}_1)=\beta\frac{Y(s_t=\bar{s}_1)}{Y(s_{t+1}=\bar{s}_2)}\pi(s_{t+1}=\bar{s}_2|s_t=\bar{s}_1)=0.95\times \frac{1}{2}\times 0.2=0.095, \tag{102}$$

$$Q(s_{t+1}=\bar{s}_1|s_t=\bar{s}_2)=\beta\frac{Y(s_t=\bar{s}_2)}{Y(s_{t+1}=\bar{s}_1)}\pi(s_{t+1}=\bar{s}_1|s_t=\bar{s}_2)=0.95\times 2\times 0.3=0.570, \tag{103}$$

$$Q(s_{t+1}=\bar{s}_2|s_t=\bar{s}_2)=\beta\frac{Y(s_t=\bar{s}_2)}{Y(s_{t+1}=\bar{s}_2)}\pi(s_{t+1}=\bar{s}_2|s_t=\bar{s}_2)=0.95\times 1\times 0.7=0.665. \tag{104}$$

(h)

次期に 1 単位の消費を確実に受け取れる証券 (one-period real bill) を 1 単位保有することは、次期に生起しうる全ての state についての Arrow security を 1 単位ずつ保有することと等しい。従って、今期の state が $s_t=\bar{s}_1=0$ であるときのこの証券の価格は、(101) と (102) より、

$$p(s_t=\bar{s}_1)=Q(s_{t+1}=\bar{s}_1|s_t=\bar{s}_1)+Q(s_{t+1}=\bar{s}_2|s_t=\bar{s}_1)=0.76+0.095=0.855. \tag{105}$$

また、今期の state が $s_t=\bar{s}_2=1$ であるときのこの証券の価格は、(103) と (104) より、

$$p(s_t=\bar{s}_2)=Q(s_{t+1}=\bar{s}_1|s_t=\bar{s}_2)+Q(s_{t+1}=\bar{s}_2|s_t=\bar{s}_2)=0.57+0.665=1.235. \tag{106}$$

(i)

まず、2-step Arrow security (t 期の state が s_t の時に発行される、$t+2$ 期の state が s_{t+2} であるときに 1 単位の財が受け取れる証券) の価格を求める。これを $Q_2(s_{t+2}|s_t)$ と置くと

$$\begin{aligned}Q_2(s_{t+2}|s_t)&=\sum_{s_{t+1}}Q(s_{t+2}|s_{t+1})Q_2(s_{t+1}|s_t)\\&=\sum_{s_{t+1}}\frac{\beta Y(s_{t+1})\pi(s_{t+2}|s_{t+1})}{Y(s_{t+2})}\frac{\beta Y(s_t)\pi(s_{t+1}|s_t)}{Y(s_{t+1})}\\&=\sum_{s_{t+1}}\frac{\beta^2\pi(s_{t+2}|s_{t+1})\pi(s_{t+1}|s_t)Y(s_t)}{Y(s_{t+2})},\end{aligned} \tag{107}$$

よって、

$$
\begin{aligned}
Q_2(s_{t+2}=\bar{s}_1|s_t=\bar{s}_1) &= \beta^2\pi(s_{t+2}=\bar{s}_1|s_{t+1}=\bar{s}_1)\pi(s_{t+1}=\bar{s}_1|s_t=\bar{s}_1)\cdot 1 \\
&\quad + \beta^2\pi(s_{t+2}=\bar{s}_1|s_{t+1}=\bar{s}_1)\pi(s_{t+1}=\bar{s}_1|s_t=\bar{s}_1)\cdot 1 \\
&= 0.95^2\times 1\times(0.8\times 0.8+0.3\times 0.2)=0.6318. \quad (108)
\end{aligned}
$$

$$Q_2(s_{t+2}=\bar{s}_2|s_t=\bar{s}_1)=0.95^2\times\frac{1}{2}\times(0.8\times 0.2+0.2\times 0.7)=0.1354. \quad (109)$$

$$Q_2(s_{t+2}=\bar{s}_1|s_t=\bar{s}_2)=0.95^2\times 2\times(0.3\times 0.8+0.7\times 0.3)=0.8123. \quad (110)$$

$$Q_2(s_{t+2}=\bar{s}_2|s_t=\bar{s}_2)=0.95^2\times 1\times(0.3\times 0.2+0.7\times 0.7)=0.4964. \quad (111)$$

よって、t 期の state それぞれにおける、2 期間安全債の価格は、

$$p_2(s_t=\bar{s}_1)=Q_2(s_{t+2}=\bar{s}_1|s_t=\bar{s}_1)+Q_2(s_{t+2}=\bar{s}_2|s_t=\bar{s}_1)=0.6318+0.1354=0.7671. \quad (112)$$

$$p_2(s_t=\bar{s}_2)=Q_2(s_{t+2}=\bar{s}_1|s_t=\bar{s}_2)+Q_2(s_{t+2}=\bar{s}_2|s_t=\bar{s}_2)=0.8123+0.4964=1.309. \quad (113)$$

(j)

まず、5-step Arrow security (t 期の state が s_t の時に発行される、$t+5$ 期の state が s_{t+5} であるときに 1 単位の財が受け取れる証券) の価格を求める。これを $Q_5(s_{t+5}|s_t)$ と置くと

$$
\begin{aligned}
Q_5(s_{t+5}|s_t) &= \sum_{s_{t+4}}\sum_{s_{t+3}}\sum_{s_{t+2}}\sum_{s_{t+1}} Q(s_{t+5}|s_{t+4})Q(s_{t+4}|s_{t+3})Q(s_{t+3}|s_{t+2})Q(s_{t+2}|s_{t+1})Q(s_{t+1}|s_t) \\
&= \sum_{s_{t+4}}\sum_{s_{t+3}}\sum_{s_{t+2}}\sum_{s_{t+1}} \frac{\beta Y(s_{t+4})\pi(s_{t+5}|s_{t+4})}{Y(s_{t+5})}\frac{\beta Y(s_{t+3})\pi(s_{t+4}|s_{t+3})}{Y(s_{t+4})} \\
&\qquad \times \frac{\beta Y(s_{t+2})\pi(s_{t+3}|s_{t+2})}{Y(s_{t+3})}\frac{\beta Y(s_{t+1})\pi(s_{t+2}|s_{t+1})}{Y(s_{t+2})}\frac{\beta Y(s_t)\pi(s_{t+1}|s_t)}{Y(s_{t+1})} \\
&= \sum_{s_{t+4}}\sum_{s_{t+3}}\sum_{s_{t+2}}\sum_{s_{t+1}} \frac{\beta^5\pi(s_{t+5}|s_{t+4})\pi(s_{t+4}|s_{t+3})\pi(s_{t+3}|s_{t+2})\pi(s_{t+2}|s_{t+1})\pi(s_{t+1}|s_t)Y(s_t)}{Y(s_{t+5})}.
\end{aligned}
\quad (114)
$$

ここで、

$$\sum_{s_{t+4}}\sum_{s_{t+3}}\sum_{s_{t+2}}\sum_{s_{t+1}}\pi(s_{t+5}=\bar{s}_j|s_{t+4})\pi(s_{t+4}|s_{t+3})\pi(s_{t+3}|s_{t+2})\pi(s_{t+2}|s_{t+1})\pi(s_{t+1}|s_t=\bar{s}_i), \quad (115)$$

は、transition matrix の 5 乗

$$P^5=\begin{bmatrix}0.8 & 0.2\\ 0.3 & 0.7\end{bmatrix}^5=\begin{bmatrix}0.6125 & 0.3875\\ 0.5813 & 0.4187\end{bmatrix}, \quad (116)$$

の第 ij 要素であることを用いると、

$$Q_5(s_{t+5} = \bar{s}_1 | s_t = \bar{s}_1) = 0.95^5 \times 1 \times 0.6125 = 0.4739, \tag{117}$$
$$Q_5(s_{t+5} = \bar{s}_2 | s_t = \bar{s}_1) = 0.95^5 \times \frac{1}{2} \times 0.3875 = 0.1499, \tag{118}$$
$$Q_5(s_{t+5} = \bar{s}_1 | s_t = \bar{s}_2) = 0.95^5 \times 2 \times 0.5813 = 0.8996, \tag{119}$$
$$Q_5(s_{t+5} = \bar{s}_2 | s_t = \bar{s}_2) = 0.95^5 \times 1 \times 0.4187 = 0.3240. \tag{120}$$

Exercise 8.8

(a)

Time-0 trading を行う経済における competitive equilibrium とは以下の 2 つの条件を満たす消費配分 $\{c_t^i\}_{t=0}^{\infty}$ $(i = 1, 2)$ と price system$\{q_t^0\}_{t=0}^{\infty}$ のことを指す。

(1) 消費配分 $\{c_t^i\}_{t=0}^{\infty}(i = 1, 2)$ は Price system $\{q_t^0\}_{t=0}^{\infty}$ を所与として、消費者 i, $(i = 1,\ 2)$ が最適に選択したものである。

(2) 消費配分が feasible である。すなわち、

$$c_t^1 + c_t^2 = y_t^1 + y_t^2, \quad \text{for all } t, \tag{121}$$

を満たしている。

(b)

まず、各消費者の効用最大化条件を求める。消費者 2 の最適化問題は

$$\max_{\{c_t^2\}_{t=0}^{\infty}} \quad \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ln(c_t^2), \tag{122}$$
$$\text{s.t.} \quad \sum_{t=0}^{\infty} q_t^0 c_t^2 \leq \sum_{t=0}^{\infty} q_t^0 y_t^2. \tag{123}$$

Lagrangian を L_2、制約条件にかかる Lagrange Multiplier を ϕ_2 とおくと、

$$L_2 = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ln(c_t^2) + \phi_2 \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} q_t^0 (y_t^2 - c_t^2) \right\}. \tag{124}$$

c_t^2 についての f.o.c. は

$$\frac{\beta^t}{c_t^2} = \phi_2 q_t^0, \quad \text{for all } t, \tag{125}$$

で与えられる。

次に、消費者 1 の効用最大化問題について考える。消費者 1 の線形な効用関数では、最適解において、ある期の消費量が負になることを数学的に許してしまう。従って、消費者 1 の効用最大化問題を、消費の非負制約 $c_t^1 \geq 0$ の課された不等号制約問題として定式化する[6]。

$$\max_{\{c_t^1\}_{t=0}^{\infty}} \quad \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t c_t^1, \tag{126}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{t=0}^{\infty} q_t^0 c_t^1 \leq \sum_{t=0}^{\infty} q_t^0 y_t^1, \tag{127}$$

$$c_t^1 \geq 0, \quad \text{for all } t. \tag{128}$$

Lagrangian を L_1、予算制約に掛かる Lagrange Multiplier を ϕ_1、消費の非負制約にかかる Lagrange Multiplier を ψ_t、とおくと、

$$L_1 = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t c_t^1 + \phi_1 \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} q_t^0 (y_t^1 - c_1^2) \right\} + \sum_{t=0}^{\infty} \psi_t c_t^1. \tag{129}$$

c_t^1 についての f.o.c. は、

$$\beta^t + \psi_t = \phi_1 q_t^0, \quad \text{for all } t. \tag{130}$$

また、消費の非負制約についての相補性条件は

$$c_t^1 \geq 0, \quad \psi_t \geq 0, \quad c_t^1 \psi_t = 0, \quad \text{for all } t. \tag{131}$$

(130) と (131) を合わせると、

$$\beta^t = \phi_1 q_t^0, \quad \text{with} \quad \psi_t = 0, \quad c_t^1 \geq 0, \tag{132}$$

$$\beta^t < \phi_1 q_t^0, \quad \text{with} \quad \psi_t > 0, \quad c_t^1 = 0. \tag{133}$$

このとき、全ての t について $\psi_t > 0$ (すなわち、全ての t について $c_t^1 = 0$) となることは、効用最大化の観点からあり得ないことに注意する[7]。

以下、全ての t について $\psi_t = 0$ となっている (非負制約が bind しない) 状態が均衡として矛盾しないことを示す。

全ての t について $\psi_t = 0$ となっているとき、(132) の $t = 0$ のものについて、$q_0^0 = 1$ を用いると、

$$\phi_1 = 1, \tag{134}$$

が得られる。これと (132) より、均衡価格は

$$q_t^0 = \beta^t, \tag{135}$$

[6] この問題は目的関数も制約条件も線形な、線形計画問題である。したがって、実際は、ラグランジュ乗数法やクーン・タッカー条件は解法として適さない。

[7] 条件 (132), (133) は、Arrow-Debreu sequrity を割引因子で割ったもの、q_t^0/β^t が一番小さい t について $q_t^0/\beta^t = 1/\phi_1$ として、その期にのみ消費をし、その他の期からは消費をしない、ということを意味している。もし、全ての t について q_t^0/β^t が等しければ、どの期に消費をするかということについて無差別となる。

を満たさなければならない。均衡価格がこのように与えられているとき、この価格を (125) に代入すると消費者 2 の消費量は、

$$c_t^2 = \frac{1}{\phi_2}, \quad \text{for all } t, \tag{136}$$

のように、時間を通じて一定となっていなければならないことが分かる。この一定の消費量を $\bar{c}^2$ として、これと $q_t^0 = \beta^t$ を消費者 2 の予算制約に代入すると、

$$\begin{aligned}
& \sum_{t=0}^{\infty} q_t^0 c_t^2 = \sum_{t=0}^{\infty} q_t^0 y_t^2, \\
\Rightarrow \quad & \bar{c}^2 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t = \alpha(\beta + \beta^3 + \beta^5 + \cdots), \\
\Rightarrow \quad & \frac{\bar{c}^2}{1-\beta} = \frac{\alpha\beta}{1-\beta^2} = \frac{\alpha\beta}{(1-\beta)(1+\beta)},
\end{aligned} \tag{137}$$

従って、消費者 2 の各期の消費量は

$$c_t^2 = \bar{c}^2 = \frac{\alpha\beta}{1+\beta} = \mu, \tag{138}$$

となる。このとき feasibility condition, $c_t^1 + c_t^2 = y_t^1 + y_t^2$ より、消費者 1 の消費量は

$$c_t^1 = \begin{cases} 0, & t \text{ が偶数}, \\ \alpha = \mu(1+1/\beta), & t \text{ が奇数}. \end{cases} \tag{139}$$

消費者 1 の、この消費配分と $\psi_t = 0$ は、価格 $q_t^0 = \beta^t$ を与件として、効用最大化条件 (132), (133) を満たし、予算制約も満たすことに注意する。

以上より、この経済の Time-0 trading の下での Competitive equilibrium は、

$$q_t^0 = \beta^t \quad \text{for all } t, \tag{140}$$

$$c_t^1 = \begin{cases} 0, & t \text{ が偶数}, \\ \alpha = \mu(1+1/\beta), & t \text{ が奇数}. \end{cases} \tag{141}$$

$$c_t^2 = \mu \quad \text{for all } t, \tag{142}$$

で与えられる[8]。

(c)

[8] この均衡消費配分は、2 種類の消費者の endowment をそのまま入れ替えた形になっている。これは消費者 2 の効用関数が凹関数、すなわち異時点間の消費の平準化動機を持っているのに対して、消費者 1 の効用関数は線形、すなわち異時点間の平準化動機がなく、各期の消費が変動したり、ある期の消費量だけが多くなってしまうことを許容できることに起因している。実際、endowment を入れ替えることで、消費者 1 は消費者 2 の endowment の変動を引き受けつつも、取引前と同じ水準の生涯効用を得ることになる。一方で、取引によって消費者 2 の生涯効用は改善される。

Arrow-Debreu 均衡の下での個人 i の t 期の wealth は各 Arrow-Debreu sequrity のネットでの保有量の和である。すなわち、

$$\Upsilon_t^i = \sum_{\tau=t}^{\infty}(c_\tau^i - y_\tau^i)q_\tau^0. \tag{143}$$

この wealth の 0 期のものは、

$$\Upsilon_0^i = \sum_{t=0}^{\infty}(c_t^i - y_t^i)q_t^0, \tag{144}$$

で与えられるが、これは各消費者の Time-0 trading 時の予算制約により、

$$\Upsilon_0^1 = \Upsilon_0^2 = 0, \tag{145}$$

となっている。

(d)

不確実性のないこの経済においては、各期に、次の期に 1 単位の消費財を得ることが出来る 1 種類の Arrow security のみが存在することになる。この価格 (pricing kernel) を $\widetilde{Q}_t$ と表す。また、消費者 i が t 期から $t+1$ 期にかけて保有する Arrow security の量を $\tilde{a}_{t+1}^i$ と表すことにする。

各期、Arrow security を取引する下での competitive equilibrium とは、以下の 2 つの条件を満たす消費配分 $\{c_t^i\}_{t=0}^{\infty}(i=1,2)$ と pricing kernel $\{\widetilde{Q}_t\}_{t=0}^{\infty}$ のことを指す[9]。

(1) 消費配分 $\{c_t^i\}_{t=0}^{\infty}(i=1,2)$ は pricing kernel $\{\widetilde{Q}_t\}_{t=0}^{\infty}$ を所与として、消費者 i, $(i=1,\,2)$ が最適に選択したものである。

(2)pricing kernel $\{\widetilde{Q}_t\}_{t=0}^{\infty}$ が市場を清算する。すなわち、全ての t において、消費者の消費配分と、そこから決定される資産保有量 $\{\tilde{a}_{t+1}^i\}_{t=0}^{\infty}(i=1,2)$ は、全ての t について、

$$c_t^1 + c_t^2 = y_t^1 + y_t^2, \tag{146}$$

$$\tilde{a}_{t+1}^1 + \tilde{a}_{t+1}^2 = 0, \tag{147}$$

を満たしている。

(e)

まず、Natural Debt Limit (NDL) について説明する。問題 (b) までで考えた、Arrow-Debreu 均衡における、ある t 期の消費財単位で測った、$\tau(\geq t)$ 期の Arrow-Debreu sequrity の価値は、(140) より、

$$q_\tau^t = \frac{q_\tau^0}{q_t^0} = \beta^{\tau-t}, \tag{148}$$

[9] この経済は、各個人の初期資産保有量がそれぞれゼロの状態からスタートしている。

で与えられる。この価格の下での、消費者 i の t 期における無限期先までの endowment の流列の価値は、

$$A_t^i = \sum_{\tau=t}^{\infty} q_\tau^t y_\tau^i. \tag{149}$$

NDL とは、t 期以降の消費を全てゼロにすることで将来返済できる最大額であるから、消費者 i の t 期から $t+1$ 期にかけての負債についての NDL は、

$$-\tilde{a}_{t+1}^i \leq A_{t+1}^i. \tag{150}$$

各消費者の効用最大化問題について考える。まず、消費者 2 の問題は、各期の予算制約と NDL 制約の下で、生涯効用を最大化することである。すなわち、

$$\max \quad \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ln c_t^2, \tag{151}$$

$$\text{s.t.} \quad c_t^2 + \tilde{a}_{t+1}^2 \widetilde{Q}_t \leq y_t^2 + \tilde{a}_t^2, \quad \text{for all } t, \tag{152}$$

$$-\tilde{a}_{t+1}^2 \leq A_{t+1}^2, \quad \text{for all } t, \tag{153}$$

$$\tilde{a}_0^2 = 0. \tag{154}$$

Lagrangian を L_2 とおくと、

$$L_2 = \sum_{t=0}^{\infty} \left[\beta^t \ln c_t^2 + \eta_t^2 (y_t^2 + \tilde{a}_t^2 - c_t^2 - \tilde{a}_{t+1}^2 \widetilde{Q}_t) + \nu_t^2 (A_{t+1}^2 + \tilde{a}_{t+1}^2) \right], \tag{155}$$

と定式化する。ただし、$\{\eta_t^2, \nu_t^2\}_{t=0}^{\infty}$ は Lagrange Multiplier である。c_t^2 と $\tilde{a}_{t+1}^2$ についての f.o.c. は、それぞれ順に、

$$\frac{\beta^t}{c_t^2} = \eta_t^2, \quad \text{for all } t, \tag{156}$$

$$\eta_t^2 \widetilde{Q}_t = \eta_{t+1}^2 + \nu_t^2, \quad \text{for all } t. \tag{157}$$

ここで、講義で解説されたとおり、効用関数が稲田条件を満たす限り、NDL 制約が等号で bind することはない[10]。すなわち、相補性条件より、全ての t について $\nu_t^2 = 0$ となる。これと、上の 2 つの f.o.c. より η^2 を消去すると、

$$\widetilde{Q}_t = \frac{\eta_{t+1}^2}{\eta_t^2} = \frac{\beta c_t^2}{c_{t+1}^2}. \tag{158}$$

同様に、消費者 1 について考える。ただし、Arrow-Debreu 均衡を求めたときと同様、稲田条件を

[10] NDL 制約を bind させるということは、その次の期以降の消費を全てゼロにしてしまうということである。効用関数が稲田条件を満たすとき、消費がゼロになってしまう期の限界効用は無限大となる。すなわち、そのような状態は最適ではない。

持たない消費者 1 については消費の非負制約もかかることに注意する。

$$\max \quad \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t c_t^1, \tag{159}$$

$$\text{s.t.} \quad c_t^1 + \tilde{a}_{t+1}^1 \widetilde{Q}_t \leq y_t^1 + \tilde{a}_t^1, \quad \text{for all } t, \tag{160}$$

$$c_t^1 \geq 0, \quad \text{for all } t, \tag{161}$$

$$-\tilde{a}_{t+1}^1 \leq A_{t+1}^1, \quad \text{for all } t, \tag{162}$$

$$\tilde{a}_0^1 = 0. \tag{163}$$

消費者 2 の場合と同様に Lagrangian を定義する。ただし、消費の非負制約に掛かる Lagrange Multiplier を $\tilde{\psi}_t$ とする。

$$L_1 = \sum_{t=0}^{\infty} \left[\beta^t c_t^1 + \eta_t^1 (y_t^1 + \tilde{a}_t^1 - c_t^1 - \tilde{a}_{t+1}^1 \widetilde{Q}_t) + \tilde{\psi}_t c_t^1 + \nu_t^1 (A_{t+1}^1 + \tilde{a}_{t+1}^1) \right]. \tag{164}$$

c_t^1 と $\tilde{a}_{t+1}^1$ についての f.o.c. は、それぞれ、

$$\beta^t + \tilde{\psi}_t = \eta_t^1, \quad \text{for all } t, \tag{165}$$

$$\eta_t^1 \widetilde{Q}_t = \eta_{t+1}^1 + \nu_t^1, \quad \text{for all } t. \tag{166}$$

ここで、消費者 1 の効用関数が稲田条件を満たさないことから、NDL 制約が、ある期に等号で bind してしまうことを排除することは出来ない。そこで、とりあえず NDL 制約を考えずに均衡を導き、その解の下で実際に NDL 制約が bind していないことを示す。また、消費の非負制約についても、Arrow-Debreu 均衡を導出したときと同様、全ての期について bind していない状態が均衡と矛盾しないことを示す。すなわち、ひとまず全ての t について、$\tilde{\psi}_t = \nu_t^1 = 0$ であるとする。このとき、消費者 1 の 2 つの f.o.c. より、η^1 を消去すると、pricing kernel が

$$\widetilde{Q}_t = \beta, \quad \text{for all } t, \tag{167}$$

を満たさねばならないことが分かる。

(167) のように価格が与えられているとき、(158) より、

$$c_t^2 = c_{t+1}^2, \quad \text{for all } t, \tag{168}$$

と、消費者 2 の消費量は時間を通じて一定でなければならない。この一定の消費量を $\bar{c}^2$ と置く。以下、この $\bar{c}^2$ を求める。$c_t^2 = \bar{c}^2$ と $\widetilde{Q}_t = \beta$ を消費者 2 の予算制約に代入すると、

$$\tilde{a}_t^2 = \bar{c}^2 - y_t^2 + \beta \tilde{a}_{t+1}^2. \tag{169}$$

これを 0 期のものから逐次代入していく。

$$\begin{aligned}
\tilde{a}_0^2 &= \bar{c}^2 - y_0^2 + \beta \tilde{a}_1^2 \\
&= \bar{c}^2 - y_0^2 + \beta(\bar{c}^2 - y_1^2 + \beta \tilde{a}_t^2) \\
&= \bar{c}^2 - y_0^2 + \beta(\bar{c}^2 - y_1^2) + \beta^2(\bar{c}^2 - y_2^2 + \beta \tilde{a}_3^2) \\
&= \cdots \\
&= \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t (\bar{c}^2 - y_t^2) + \lim_{t \to \infty} \beta^t \tilde{a}_t^2.
\end{aligned} \tag{170}$$

この式に、$\tilde{a}_0^2 = 0$ を用いると、

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t (\bar{c}^2 - y_t^2) = -\lim_{t\to\infty} \beta^t \tilde{a}_t^2. \tag{171}$$

ここで、NDL 制約を用いると、

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t (\bar{c}^2 - y_t^2) \leq \lim_{t\to\infty} \beta^t A_t^2 = 0, \tag{172}$$

となる。ただし、最後の等号は NDL A_t^2 が有限の値であることを用いている。すなわち、

$$\begin{aligned} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \bar{c}^2 &\leq \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t y_t^2, \\ \iff \quad \frac{\bar{c}^2}{1-\beta} &\leq \frac{\alpha\beta}{(1-\beta)(1+\beta)}, \\ \iff \quad \bar{c}^2 &\leq \frac{\alpha\beta}{1+\beta} = \mu. \end{aligned} \tag{173}$$

ここで、この式が厳密な不等号で成立してしまうことは効用最大化の観点から矛盾である。すなわち消費者 2 の消費量は

$$c_t^2 = \bar{c}^2 = \mu, \quad \text{for all } t, \tag{174}$$

で与えられることになる。これを消費者 2 の 0 期の予算制約に代入すると、

$$\tilde{a}_1^2 = \frac{1}{\beta}(y_0^2 - c_0^2 + \tilde{a}_0^2) = \frac{1}{\beta}(0 - \mu + 0) = -\frac{\mu}{\beta}. \tag{175}$$

これを 1 期の予算制約に代入すると、

$$\tilde{a}_2^2 = \frac{1}{\beta}(y_1^2 - c_1^2 + \tilde{a}_1^2) = \frac{1}{\beta}\left(\alpha - \mu - \frac{\mu}{\beta}\right) = 0. \tag{176}$$

以下、2 期以降はこれら 2 つの繰り返しとなる。従って、消費者 2 の Arrow security の保有量は

$$\tilde{a}_t^2 = \begin{cases} 0, & t \text{ が偶数}, \\ -\frac{\mu}{\beta}, & t \text{ が奇数}, \end{cases} \tag{177}$$

で与えられることになる。

一方で、財市場の均衡条件と資産市場の均衡条件より、消費者 1 の消費配分と Arrow security の保有量は、

$$c_t^1 = \begin{cases} 0, & t \text{ が偶数}, \\ \alpha = \mu(1 + 1/\beta), & t \text{ が奇数}. \end{cases} \tag{178}$$

$$\tilde{a}_t^1 = \begin{cases} 0, & t \text{ が偶数}, \\ \frac{\mu}{\beta}, & t \text{ が奇数}, \end{cases} \tag{179}$$

と求められる。このとき、消費者 1 の Arrow security の保有量は非負 (負債を持つことはない) となっているため、NDL 制約を当然満たしている。すなわち、NDL 制約を bind しないものとした仮定は正当化されている。

以上より、各期 Arrow security を取引する下での Competitive equilibrium は、

$$c_t^1 = \begin{cases} 0, & t \text{ が偶数}, \\ \alpha = \mu(1+1/\beta), & t \text{ が奇数}, \end{cases} \tag{180}$$

$$c_t^2 = \mu \qquad \text{for all } t, \tag{181}$$

$$\tilde{a}_t^1 = \begin{cases} 0, & t \text{ が偶数}, \\ \frac{\mu}{\beta}, & t \text{ が奇数}, \end{cases} \tag{182}$$

$$\tilde{a}_t^2 = \begin{cases} 0, & t \text{ が偶数}, \\ -\frac{\mu}{\beta}, & t \text{ が奇数}, \end{cases} \tag{183}$$

$$\widetilde{Q}_t = \beta \qquad \text{for all } t, \tag{184}$$

で与えられる。

Exercise 8.13

(a)

第 j group の個人の time-0 trading の下での最大化問題は、以下の様に記述される。

$$\max \; U(c^j) = \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t} \beta^t \pi(s^t|s_0) \frac{c_t^j(s^t)^{1-\gamma}}{1-\gamma}, \tag{185}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t} c_t^j(s^t) q_t^0(s^t) \leq \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t} y_t^j(s_t) q_t^0(s^t). \tag{186}$$

この時、Competitive equilibrium with time-0 trading は、以下の 2 つの性質を満たすような、消費の allocation と price system のことである。

(1) 全ての個人は price system の sequence $\{q_t^0(s^t)\}_{t=0}^{\infty}$ を given にして、上記の最大化問題を解いている。
(2) 全ての state の sequence $\{s^t\}_{t=0}^{\infty}$ に対して、資源制約が満たされている。

次に、competitive equilibrium を求める。Lagrangian を L_j、Lagrange Multiplier を μ_j とおくと、

$$L_j = \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t} \beta^t \pi(s^t|s_0) \frac{c_t^j(s^t)^{1-\gamma}}{1-\gamma} + \mu_j \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t} y_t^j(s_t) q_t^0(s^t) - \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t} c_t^j(s^t) q_t^0(s^t) \right\}. \tag{187}$$

従って、$c_t^j(s^t)$ についての f.o.c. は

$$\beta^t \pi(s^t|s_0) c_t^j(s^t)^{-\gamma} - \mu_j q_t^0(s^t) = 0, \quad \forall t, s^t, j \in \{0, 1\}. \tag{188}$$

上記の式について、$j = 0$ と $j = 1$ の比をとると

$$\left[\frac{c_t^0(s^t)}{c_t^1(s^t)}\right]^{-\gamma} = \frac{\mu_0}{\mu_1} \Leftrightarrow \frac{c_t^0(s^t)}{c_t^1(s^t)} = \left[\frac{\mu_1}{\mu_0}\right]^{\frac{1}{\gamma}}, \quad \forall t, s^t. \tag{189}$$

ここで、$\left[\frac{\mu_1}{\mu_0}\right]^{\frac{1}{\gamma}} = \lambda$ とおき、資源制約式 $c_t^0(s^t) + c_t^1(s^t) = y_t(s_t)$ と併せると、消費の equilibrium allocation が以下の様に求まる。

$$c_t^0(s^t) = \frac{\lambda}{1+\lambda} y_t(s_t), \quad \forall t, s^t, \tag{190}$$

$$c_t^1(s^t) = \frac{1}{1+\lambda} y_t(s_t), \quad \forall t, s^t. \tag{191}$$

次に、price system を求める。f.o.c. について、$t = 0$ のものと比をとると、

$$q_t^0(s^t) = \beta^t \pi(s^t|s_0) \left[\frac{c_t^j(s^t)}{c_0^j(s^0)}\right]^{-\gamma}, \quad \forall t, s^t, j \in \{0, 1\}. \tag{192}$$

ここで、先ほど求めた $c_t^1(s^t)$ もしくは $c_t^0(s^t)$ を上式に代入すると、以下の様に price system が求まる。

$$q_t^0(s^t) = \beta^t \pi(s^t|s_0) \left[\frac{y_t(s^t)}{\bar{y}^1}\right]^{-\gamma}. \tag{193}$$

ただし、初期条件より $s_0 = 1$ を用いている。以上より、competitive equilibrium は以下の 3 つの式によって特徴付けられる。

$$c_t^0(s^t) = \frac{\lambda}{1+\lambda} y_t(s_t), \quad \forall t, s^t, \tag{194}$$

$$c_t^1(s^t) = \frac{1}{1+\lambda} y_t(s_t), \quad \forall t, s^t, \tag{195}$$

$$q_t^0(s^t) = \beta^t \pi(s^t|s_0) \left[\frac{y_t(s^t)}{\bar{y}^1}\right]^{-\gamma}. \tag{196}$$

但し、生涯予算制約式に (196) 式を代入することで、

$$\lambda = \frac{\sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t} y_t^0(s_t) q_t^0(s^t)}{\sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t} y_t^1(s_t) q_t^0(s^t)} = \frac{\text{第 0 group の個人の entire endowment の価値}}{\text{第 1 group の個人の entire endowment の価値}} \tag{197}$$

である。

(b)

毎期、総 endowment $y_t(s_t)$ を得るような代表的個人を仮定する。この時、代表的個人の瞬時効用関数が、heterogenous agent が混在する経済における各個人の瞬時効用関数と同じ型ならば、代表的個人モデルと分権経済モデルは同一の price system を生む[11]。即ち、代表的個人の目的関数が、

$$\tilde{U}(c) = \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t} \beta^t \pi(s^t|s_0) \frac{c_t(s^t)^{1-\gamma}}{1-\gamma}, \tag{198}$$

ならば、この下で決定される price system は (a) で求めた price system と同一になる。但し、$c_t(s^t)$ は t 期、s^t の下での代表的個人の消費量を表す。

以下では、上記のことが正しいことを示す。毎期、総 endowment を得るような代表的個人が直面する問題は、以下の様に記述される。

$$\max \ U(c) = \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t} \beta^t \pi(s^t|s_0) \frac{c_t(s^t)^{1-\gamma}}{1-\gamma}, \tag{199}$$

$$\text{s.t.} \ \ \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t} c_t(s^t) q_t^0(s^t) \leq \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t} y_t(s_t) q_t^0(s^t). \tag{200}$$

Lagrangian を L、Lagrange Multiplier を μ とおくと

$$L = \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t} \beta^t \pi(s^t|s_0) \frac{c_t(s^t)^{1-\gamma}}{1-\gamma} + \mu \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t} y_t(s_t) q_t^0(s^t) - \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t} c_t(s^t) q_t^0(s^t) \right\}. \tag{201}$$

$c_t(s^t)$ について f.o.c. を求めると、

$$q_t^0(s^t) = \beta^t \pi(s^t|s_0) \left[\frac{c_t(s^t)}{c_0(s^0)} \right]^{-\gamma}, \quad \forall t, s^t. \tag{202}$$

資源制約式より $c_t(s^t) = y_t(s_t), \ \forall t, s^t$ なので、

$$\begin{aligned} q_t^0(s^t) &= \beta^t \pi(s^t|s_0) \left[\frac{y_t(s^t)}{y_0(s^0)} \right]^{-\gamma} \\ &= \beta^t \pi(s^t|s_0) \left[\frac{y_t(s^t)}{\bar{y}^1} \right]^{-\gamma}, \quad \forall t, s^t. \end{aligned} \tag{203}$$

上記の式は、(a) で求めた price system と完全に一致している。従って、代表的個人の効用関数が、heterogenous agent の設定における各個人の効用関数と等しければ、均衡において決定される price system が同一になることが確認された。また、上記の結果は総 endowment のみが問題であるので、各個人の initial endowment の分布には依存しない。

[11] この結果は、各個人の瞬時効用関数が HARA (Hyperbolic Absolute Risk Aversion) 型、即ち

$$\frac{u'''u'}{(u'')^2} = k, \quad \text{k はある定数}.$$

を満たす限り成立する。HARA 型効用関数のクラスには、CRRA 型、CARA 型、quadratic utility などが含まれる。詳しくはテキスト p.600 を参照。

最後に、この経済にいて代表的個人を仮定することの意義について述べる。まず、上記の結果から、この経済においては heterogenous agent の設定のままモデルを解いても、毎期、総 endowment を得るような代表的個人を仮定してモデルを解いても、得られる price system は一致する。従って、price system の sequence だけを知りたい場合には、複雑な heterogenous agent のモデルではなく、代表的個人を仮定した単純なモデルを考えた方が良いと言える。但し、price system の sequence とともに、各個人間での消費の allocation も知りたい場合には、その限りではない。

(c)

(i)

均衡においては、0 期において group 0 の個人は group 1 の個人の entire endowment の $\frac{\lambda}{1+\lambda}$ の割合だけの請求権を購入し、group 1 の個人は group 0 の個人の entire endowment の $\frac{1}{1+\lambda}$ の割合だけの請求権を購入する。

以下では、上記のことが正しいことを示す。まず、entire endowment を交換することで達成できる消費配分は、Arrow-Debreu sequrity を交換することによっても達成できる。しかし、Arrow-Debreu sequrity を交換することで達成できる消費配分は、entire endowment を交換することで達成できるとは限らない。従って、entire endowment しか交換できない経済においては、Arrow-Debreu sequrity を交換できる経済よりも達成できる消費配分のバラエティーが狭いことになる。以上より、entire endowment しか交換できない経済において、もしも Arrow-Debreu sequrity を交換できる経済と同じ消費配分を達成できるのならば、それは必ず競争均衡になる筈である。

ここで、最初にあげたような entire endowment の交換が 0 期において行われたとする。この時の、任意の t 期、s^t における消費配分は以下の様になる。

$$c_t^0(s^t) = \frac{\lambda}{1+\lambda} y_t(s_t), \quad \forall t, s^t, \tag{204}$$
$$c_t^1(s^t) = \frac{1}{1+\lambda} y_t(s_t), \quad \forall t, s^t. \tag{205}$$
$$\tag{206}$$

これは、(a) で求めた均衡消費配分と完全に一致する。従って、上記のような消費配分が、entire endowment しか交換できない経済においても、均衡消費配分となる。

(ii)

テキストの p.228-p.230 の議論より、ADE と SME における消費配分は一致する。従って、Arrow sequrity しか交換できない経済においても、均衡消費配分は

$$c_t^0(s^t) = \frac{\lambda}{1+\lambda} y_t(s_t), \quad \forall t, s^t, \tag{207}$$
$$c_t^1(s^t) = \frac{1}{1+\lambda} y_t(s_t), \quad \forall t, s^t. \tag{208}$$

となる。

(iii)
均衡においては、risk free asset の交換は一切起こらないことを示す。

初期 state は $s_0 = 1$ なので、初期から無限期先まで、ずっと $s_t = 1$ が続くような history が strict に正の確率で発生する。この時、もしも今期の state が $s_t = 1$ の下で group 0 の個人が risk free asset を発行したとすると、NDL に抵触する。何故ならば、もしも次期以降、ずっと $s_t = 1$ が続いたのならば毎期、借金を返すために新たに risk free asset を発行しなければならず、借金が無限大に膨らむからである。従って、今期の state が $s_t = 1$ の下では、group 0 の個人は risk free asset を発行することはできない。

次に、もしも第 1 期に state が $s_1 = 0$ になったとする。この時は、今度は group 1 の個人は risk free asset を発行することができない。何故ならば、もしも次期以降、ずっと $s_t = 0$ が続いたのならば、借金が無限大に膨らむため、NDL に抵触するからである。

以上より、今期の state が $s_t = 0$ でも $s_t = 1$ でも risk free asset は発行されない。従って、それぞれの group の個人は endowment のみを消費することになるので、均衡における消費配分は

$$c_t^0(s^t) = y_t^0(s_t), \quad \forall t, s^t, \tag{209}$$
$$c_t^1(s^t) = y_t^1(s_t), \quad \forall t, s^t, \tag{210}$$

となる。

(d)
$\pi(s' = 0|s = 1) = 0$ と初期条件 $s_0 = 1$ より、今期から無限期先まで、ずっと $s_t = 1$ が続くことになる。この時、group 0 の個人は生涯に渡って一度も endowment を得ることはないので、予算制約より Arrow-Debreu sequrity を購入することはできない。従って、全ての個人は endowment のみを消費することになるので、均衡における消費配分は

$$c_t^0(s^t) = y_t^0(s_t), \quad \forall t, s^t, \tag{211}$$
$$c_t^1(s^t) = y_t^1(s_t), \quad \forall t, s^t, \tag{212}$$

となる。また、このケースにおいては group 0 の個人は一度も endowment を得ることはないので、当然、全ての期において group 1 の個人が経済にある全ての endowment を消費することになる。

上記は Markov Process の設定と予算制約式のみから得られるものなので、パラメータの値によって結果が変わることはない。また、経済学的な説明としては、この経済は完全不平等経済を表しており、このような場合においてはどちらかの group が全ての endowment を消費するという配分 (エッジワース・ボックスの端点) が、競争均衡として達成されることが分かる。

(e)
問題 (d) と同様に、この経済においては Arrow-Debreu sequrity の交換は一切おこらない。従って、各個人には default する対象そのものが存在しない。