マクロ経済II第七回宿題解答†

TA：荒渡良‡

問題1

(Exercise 8.2)
この経済における t 期の state s_t は成長率 λ_t であり、history s^t は、0 期から t 期までの、この成長率の実現値の流列で与えられる。以下では、この経済の t 期の history を λ^t で表す。また、0 期に開かれる市場における、t 期、history λ^t の時の財を 1 単位受け取ることが出来る Arrow-Debreu 証券の価格を $q_t^0(\lambda^t)$ で表し、代表的消費者の t 期、history λ^t における消費量を $c_t(\lambda^t)$ で表すことにする。また、t 期、history λ^t の時の endowment を $y_t(\lambda^t)$ で表す。

(a). この経済における Competitive Equilibrium とは、以下の 2 つの性質を満たすような、代表的消費者の消費の sequence $\{c_t(\lambda^t)\}_{t=0}^{\infty}$ と price system $\{q_t^0(\lambda^t)\}_{t=0}^{\infty}$ のことである。

- $\{c_t(\lambda^t)\}_{t=0}^{\infty}$ は、代表的消費者が price system $\{q_t^0(\lambda^t)\}_{t=0}^{\infty}$ を所与とした下で、最適に選択した消費配分となっている。
- 消費の sequence $\{c_t(\lambda^t)\}_{t=0}^{\infty}$ が feasible allocation である。すなわち、

$$c_t(\lambda^t) = y_t(\lambda^t), \qquad \text{for all } t,\ \lambda^t. \tag{1}$$

(b). 代表的消費者の直面する問題は、

$$\max \quad \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{\lambda^t} \beta^t \frac{c_t(\lambda^t)^{1-\gamma}}{1-\gamma} \pi_t(\lambda^t), \tag{2}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{\lambda^t} c_t(\lambda^t) q_t^0(\lambda^t) \le \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{\lambda^t} y_t(\lambda^t) q_t^0(\lambda^t), \tag{3}$$

---

†解答の作成にあたっては、経済学研究科 D1 の川元康一氏に協力して頂いた。

‡E-mail address:ege001ar@mail2.econ.osaka-u.ac.jp

と定式化される。制約条件式に掛かるラグランジュ乗数を μ とし、この問題のラグランジュ関数を $\mathcal{L}$ と定義すると、

$$\mathcal{L} = \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{\lambda^t} \beta^t \frac{c_t(\lambda^t)^{1-\gamma}}{1-\gamma} \pi_t(\lambda^t) + \mu \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{\lambda^t} \left(y_t(\lambda^t) - c_t(\lambda^t) \right) q_t^0(\lambda^t) \right\}. \tag{4}$$

$c_t(\lambda^t)$ についての f.o.c. は、

$$\beta^t c_t(\lambda^t)^{-\gamma} \pi_t(\lambda^t) = \mu q_t^0(\lambda^t), \quad \text{for all} \quad t,\ \lambda^t. \tag{5}$$

任意の t, λ^t のものと、$t = 0$ のものとの比をとると、

$$\frac{\beta^t c_t(\lambda^t)^{-\gamma} \pi_t(\lambda^t)}{\beta^0 c_0(\lambda^0)^{-\gamma} \pi_0(\lambda^0)} = \frac{q_t^0(\lambda^t)}{q_0^0(\lambda^t)}. \tag{6}$$

$\lambda^0 = \lambda_0$ は既知となっている状況を考えているため $\pi_0(\lambda^0) = 1$ である。また、市場価格は 0 期の消費財単位で測られているため $q_0^0(\lambda^0) = 1$ である。従って、

$$q_t^0(\lambda^t) = \beta^t \pi_t(\lambda^t | \lambda_0) \left[\frac{c_t(\lambda^t)}{c_0(\lambda_0)} \right]^{-\gamma}. \tag{7}$$

ここで、feasibility condition より、

$$c_t(\lambda^t) = y_t(\lambda^t), \quad \text{for all } t,\ \lambda^t. \tag{8}$$

また、$y_0 = 1$ より、

$$\begin{aligned} y_t &= \lambda_t y_{t-1} = \lambda_t \lambda_{t-1} y_{t-2} = \cdots \\ &= \lambda_t \lambda_{t-1} \cdots \lambda_1 y_0 \\ &= \lambda_t \lambda_{t-1} \cdots \lambda_1. \end{aligned} \tag{9}$$

よって、

$$c_t(\lambda^t) = y_t(\lambda^t) = \lambda_t \lambda_{t-1} \cdots \lambda_1, \tag{10}$$

であり、これを (7) に代入して、

$$\begin{aligned} q_t^0(\lambda^t) &= \beta^t \pi_t(\lambda^t | \lambda_0) (\lambda_t \lambda_{t-1} \cdots \lambda_1)^{-\gamma}, \\ &= \beta^t \pi(\lambda_t | \lambda_{t-1}) \pi(\lambda_{t-1} | \lambda_{t-2}) \cdots \pi(\lambda_1 | \lambda_0) (\lambda_t \lambda_{t-1} \cdots \lambda_1)^{-\gamma}, \end{aligned} \tag{11}$$

が得られる。(10) と (11) が消費配分 $\{c_t(\lambda^t)\}_{t=0}^{\infty}$ と price system $\{q_t^0(\lambda^t)\}_{t=0}^{\infty}$ を与える。

(問題 c 以降の数値設定)

- Transition matrix,

$$P = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.15 & 0.85 \end{bmatrix}. \tag{12}$$

- 各期、生起しうる state, $\bar{\lambda}_1 = 0.98$, $\bar{\lambda}_2 = 1.03$.
- Initial state, $\lambda_0 = \bar{\lambda}_1 = 0.98$.
- Initial endowment, $y_0 = 1$.
- 選好パラメータ、$\beta = 0.96$, $\gamma = 2$.

(c). $c_t(\lambda^t) = y_t(\lambda^t)$ であることを考慮すると、ある T 期までの消費の成長率の平均は

$$\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\frac{c_t(\lambda^t)}{c_{t-1}(\lambda^{t-1})} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\frac{y_t}{y_{t-1}} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\lambda_t, \tag{13}$$

で与えられる。この (λ_0 を観測する前の) 平均値の $T \to \infty$ の極限を求める。

$p_{11} = 0.05$, $p_{22} = 0.85$ の設定の下では transition matrix P の全ての要素は正であり、従って、P に従うこの Markov process は唯一の定常分布を持ち、かつ、この定常分布に漸近的に収束する (asymptotic stationarity を持つ)。この Markov process の定常分布は

$$\boldsymbol{\pi}_\infty = \begin{bmatrix}\pi_\infty(\bar{\lambda}_1)\\ \pi_\infty(\bar{\lambda}_2)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1-p_{22}}{1-p_{11}+1-p_{22}}\\ \frac{1-p_{11}}{1-p_{11}+1-p_{22}}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0.4286\\ 0.5714\end{bmatrix}, \tag{14}$$

で与えられる[1]。この、定常分布にしたがっているときの λ_∞ の期待値は、

$$\begin{aligned}E[\lambda_\infty] &= \frac{1-p_{22}}{1-p_{11}+1-p_{22}}\bar{\lambda}_1 + \frac{1-p_{11}}{1-p_{11}+1-p_{22}}\bar{\lambda}_2\\ &= 0.4286 \times 0.98 + 0.5714 \times 1.03\\ &= 1.0086.\end{aligned} \tag{15}$$

(d). 0 期に 1 単位の消費財を受け取ることが出来る証券の価格 $q_0^0(\lambda^0)$ は（0 期の state が観察された後で市場が開かれているので）1 である。

1 期に (確実に)1 単位の消費財を受け取ることが出来る証券の価格 q_1^0 を求める。$\lambda_0 = \bar{\lambda}_1 (= 0.98)$ を所与とすると、1 期に生起しうる history $\lambda^1 = (\lambda_1, \lambda_0)$ は、$(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_1)$ と $(\bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_1)$ の 2 種類である。1 期に (確実に)1 単位の消費財を受け取ることが出来る証券を 1 単位持つことは、これら 2 種類の Arrow-Debreu 証券を 1 単位ずつ持つことと等しいので、q_1^0 は、これら 2 つの証券価格の和で与えられる。これら 2 種類の Arrow-Debreu 証券の価格を求める。(11) に与えられた数値を代入することで、

$$\begin{aligned}q_1^0(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_1) &= \beta\pi(\bar{\lambda}_1|\bar{\lambda}_1)\bar{\lambda}_1^{-\gamma}\\ &= 0.96 \times 0.8 \times 0.98^{-2} = 0.7997,\end{aligned} \tag{16}$$

$$q_1^0(\bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_1) = 0.96 \times 0.2 \times 1.03^{-2} = 0.1810. \tag{17}$$

[1] 行列 P' の固有値 1 に伴う固有ベクトルを求める。

従って、1 期に (確実に)1 単位の消費財を受け取ることが出来る証券の価格 q_1^0 は、(16) と (17) の和を取ることで、

$$
\begin{aligned}
q_1^0 &= q_1^0(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_1) + q_1^0(\bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_1) \\
&= 0.7997 + 0.1810 \\
&= 0.9806.
\end{aligned} \tag{18}
$$

2 期に (確実に)1 単位の消費財を受け取ることが出来る証券の価格 q_2^0 を求める。$\lambda_0 = \bar{\lambda}_1 (= 0.98)$ を所与とすると、2 期までに生起しうる history $\lambda^1 = (\lambda_2, \lambda_1, \lambda_0)$ は、$(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_1)$, $(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_1)$, $(\bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_1)$, $(\bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_1)$ の 4 種類である。2 期に (確実に)1 単位の消費財を受け取ることが出来る証券を 1 単位持つことは、これら 4 種類の Arrow-Debreu 証券を 1 単位ずつ持つことと等しいので、q_2^0 は、これら 4 つの証券価格の和で与えられる。これら 4 種類の Arrow-Debreu 証券の価格を求める。(11) に与えられた数値を代入することで、

$$
\begin{aligned}
q_2^0(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_1) &= \beta^2 \pi(\bar{\lambda}_1|\bar{\lambda}_1)\pi(\bar{\lambda}_1|\bar{\lambda}_1)(\bar{\lambda}_1\bar{\lambda}_1)^{-\gamma} \\
&= 0.96^2 \times 0.8 \times 0.8 \times (0.98 \times 0.98)^{-2} = 0.6394, && (19) \\
q_2^0(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_1) &= \beta^2 \pi(\bar{\lambda}_1|\bar{\lambda}_2)\pi(\bar{\lambda}_2|\bar{\lambda}_1)(\bar{\lambda}_1\bar{\lambda}_2)^{-\gamma} \\
&= 0.96^2 \times 0.15 \times 0.2 \times (0.98 \times 1.03)^{-2} = 0.0271, && (20) \\
q_2^0(\bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_1) &= \beta^2 \pi(\bar{\lambda}_2|\bar{\lambda}_1)\pi(\bar{\lambda}_1|\bar{\lambda}_1)(\bar{\lambda}_2\bar{\lambda}_1)^{-\gamma} \\
&= 0.96^2 \times 0.2 \times 0.8 \times (1.03 \times 0.98)^{-2} = 0.1447, && (21) \\
q_2^0(\bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_1) &= \beta^2 \pi(\bar{\lambda}_2|\bar{\lambda}_2)\pi(\bar{\lambda}_2|\bar{\lambda}_1)(\bar{\lambda}_2\bar{\lambda}_2)^{-\gamma} \\
&= 0.96^2 \times 0.85 \times 0.2 \times (1.03 \times 1.03)^{-2} = 0.1392, && (22)
\end{aligned}
$$

従って、第 2 期に (確実に)1 単位の消費財を受け取ることが出来る証券の価格 q_2^0 は、(19), (20), (21), (22) の和を取ることで、

$$
\begin{aligned}
q_2^0 &= q_2^0(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_1) + q_2^0(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_1) + q_2^0(\bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_1) + q_2^0(\bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_1) \\
&= 0.6394 + 0.0271 + 0.1447 + 0.1392 \\
&= 0.9505.
\end{aligned} \tag{23}
$$

(e). 0 期の state は $\lambda_0 = \bar{\lambda}_1$ であるから、0 期の state が $\lambda_0 = \bar{\lambda}_1$ であるときに 1 単位の消費財が受け取れる証券の 0 期の価格は 1 である。

1 期の state が $\lambda_1 = \bar{\lambda}_1$ であるときに 1 単位の消費財が受け取れる証券の 0 期の価格 $q_1^0(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_1)$ は (16) より、

$$
q_1^0(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_1) = 0.7997. \tag{24}
$$

2 期の state が $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$ であるときに 1 単位の消費財が受け取れる証券（価格 $q_2^0(\bar{\lambda}_1)$ とする）を 1 単位持つことは、2 期の history $(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_1)$, $(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_1)$ についての Arrow-Debreu 証券をそれぞれ 1 単位ずつ持つことと等しい。従って (19) と (20) より、

$$\begin{aligned} q_2^0(\bar{\lambda}_1) &= q_2^0(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_1) + q_2^0(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_1) \\ &= 0.6394 + 0.0271 \\ &= 0.6665, \end{aligned} \tag{25}$$

(f). 0 期の state は $\lambda_0 = \bar{\lambda}_1$ であるから、0 期の state が $\lambda_0 = \bar{\lambda}_2$ であるときに 1 単位の消費財が受け取れる証券には価格が付かない。

1 期の state が $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2$ であるときに 1 単位の消費財が受け取れる証券の 0 期の価格 $q_1^0(\bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_1)$ は (17) より、

$$q_1^0(\bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_1) = 0.1810. \tag{26}$$

2 期の state が $\lambda_2 = \bar{\lambda}_2$ であるときに 1 単位の消費財が受け取れる証券（価格 $q_2^0(\bar{\lambda}_2)$ とする）を 1 単位持つことは、2 期の history $(\bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_1)$, $(\bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_1)$ についての Arrow-Debreu 証券をそれぞれ 1 単位ずつ持つことと等しい。従って (21) と (22) より、

$$\begin{aligned} q_2^0(\bar{\lambda}_2) &= q_2^0(\bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_1) + q_2^0(\bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_1) \\ &= 0.1447 + 0.1392 \\ &= 0.2839. \end{aligned} \tag{27}$$

(g).

- 安全債券の満期の違いによる価格の違い。
  (18), (23) を見ると、ある期に確実に 1 単位の財が受け取れる証券（安全債券）は、財が受け取れる期（満期）が将来になる程、価格が低くなっている事がわかる。
- 同じ期の state 間での contingent claim の価格の違い
  (24) と (26)、あるいは、(25) と (27) を比べてみると同じ期の異なる state の実現に応じた消費財の請求権の価格は、悪い state $(\bar{\lambda}_1)$ に対応するものの方が高くなっている[2]。

[2]異なる state に対応する証券価格の違いはその state が生起する確率にも依存しているため、価格の違いが state の良し悪しのみを反映しているとは言えない。しかし、例えば第 1 期について見てみると、bad state の生起する確率は 0.8 で good state の生起確率の 4 倍であるが、(24) と (26) を見ると、bad state の時の財の請求権の価格は good state のものの 4 倍以上になっている。また、第 2 期について見てみると、bad state の生起する確率は 0.67 で good state の生起確率の約 2 倍であるが、(25) と (27) を見ると、bad state の時の財の請求権の価格は good state のものの 2 倍以上になっている。

問題2

(Exercise 8.3)
不確実性のない、この経済における t 期に消費財を受け取ることができる証券の 0 期の消費財で測った価値を q_t^0 で表すことにする。

(a). Competitive equilibrium とは、以下の 2 つの性質を満たすような、各消費者の消費の sequence $\{c_t^i\}_{t=0}^{\infty}$, $(i = 1, 2)$ と price system $\{q_t^0\}_{t=0}^{\infty}$ のことである。

- $\{c_t^i\}_{t=0}^{\infty}$ は、消費者 $i = 1, 2$ が price system $\{q_t^0\}_{t=0}^{\infty}$ を所与として、最適に決定した消費配分となっている。
- 消費配分 $\{c_t^i\}_{t=0}^{\infty}$ が feasibility を満たす。すなわち、

$$c_t^1 + c_t^2 = y_t^1 + y_t^2, \qquad \text{for all } t \geq 0, \tag{28}$$

  となっている。

(b). 第 i 消費者の効用最大化問題は、

$$\max_{\{c_t^i\}_{t=0}^{\infty}} \quad \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t^i), \tag{29}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{t=0}^{\infty} c_t^i q_t^0 \leq \sum_{t=0}^{\infty} y_t^i q_t^0, \tag{30}$$

で定式化される。ここで、$u(\cdot)$ は strictly increasing なので、最適解において制約条件が不等号で満たされていることはない。従って、以下では制約条件式は等号で成立しているものとして問題を解く。この問題のラグランジュ関数を $\mathcal{L}_i$、制約条件式にかかるラグランジュ乗数を μ_i と置くと、

$$\mathcal{L}_i = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t^i) + \mu_i \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} (y_t^i - c_t^i) q_t^0 \right\}. \tag{31}$$

c_t^i についての f.o.c. は

$$\beta^t u'(c_t^i) = \mu_i q_t^0, \qquad \text{for all } t; \quad i = 1, 2. \tag{32}$$

この f.o.c. の、$i = 1, 2$ についてのものの比をとると、

$$\frac{u'(c_t^1)}{u'(c_t^2)} = \frac{\mu_1}{\mu_2}. \tag{33}$$

これは、均衡において各消費者の消費量が満たすべき関係式である。ここで、$u(\cdot)$ は strictly concave であるから、$u'(\cdot)$ は単調減少関数であり、$u'(\cdot)$ は逆関数を持つ。よって (33) より

$$c_t^1 = u'^{-1}\left[\frac{\mu_1}{\mu_2}u'(c_t^2)\right], \tag{34}$$

の様に、均衡における c_t^1 と c_t^2 の関係を書き直すことができる。

ここで、問題の設定より $y_t^1 + y_t^2$ は全ての t について 1 である。従って、(28) の feasibility condition は $c_t^1 + c_t^2 = 1$ となり、これに (34) を代入すると、

$$u'^{-1}\left[\frac{\mu_1}{\mu_2}u'(c_t^2)\right] + c_t^2 = 1, \qquad \text{for all } t, \tag{35}$$

となる。この、c_t^2 についての方程式の形は、時点 t に全く依存しない。従って、均衡における c_t^2 は時間を通じて一定となる。また、$c_t^1 = 1 - c_t^2$ も時間を通じて一定となる[3]。以下では、この一定の均衡消費配分を $c_t^1 = \bar{c}^1$, $c_t^2 = \bar{c}^2$ で表すことにする。

次に、均衡価格を求める。消費者の効用最大化問題の f.o.c. (32) の t 時点のものと 0 時点のものの比をとり、q_0^0 であることと、均衡消費配分が一定 $(\bar{c}^i)$ であることを用いると、

$$q_t^0 = \frac{\beta^t u'(c_t^i)}{u'(c_0^i)} = \beta^t\frac{u'(\bar{c}^i)}{u'(\bar{c}^i)} = \beta^t, \qquad \text{for all } t. \tag{36}$$

これが均衡価格である。

次に、各消費者の消費配分を求める。消費者 1 について、予算制約に $c_t^1 = \bar{c}^1$ と (36) の均衡価格を代入すると、

$$\begin{aligned} \sum_{t=0}^{\infty}\bar{c}^1\beta^t &= \sum_{t=0}^{\infty} y_t^1\beta^t, \\ \Longleftrightarrow \qquad \frac{\bar{c}^1}{1-\beta} &= \sum_{t=0}^{\infty} y_t^1\beta^t \\ &= (1 + \beta^3 + \beta^6 + \beta^9 + \cdots) \\ &= \frac{1}{1-\beta^3} \end{aligned} \tag{37}$$

よって、

$$\begin{aligned} \bar{c}^1 &= \frac{1-\beta}{1-\beta^3} \\ &= \frac{1-\beta}{(1-\beta)(1+\beta+\beta^2)} \\ &= \frac{1}{1+\beta+\beta^2}. \end{aligned} \tag{38}$$

[3] この結果は、各時点における消費配分は経済全体の集計賦存量にのみ依存する、という完備市場の競争均衡の性質 (テキスト p.215 の Proposition 2) によるものである。いま考えている経済では、各個人の賦存量は時点によって異なるものの、集計賦存量は時点を通じて一定である。従って、均衡消費配分も時点を通じて一定となっている。

同様にして、消費者2の予算制約について、

$$\begin{aligned}\frac{\bar{c}^2}{1-\beta} &= \sum_{t=0}^{\infty} y_t^2 \beta^t \\ &= (\beta + \beta^2 + \beta^4 + \beta^5 + \beta^7 + \beta^8 + \cdots) \\ &= (\beta + \beta^4 + \beta^7 + \cdots) + (\beta^2 + \beta^5 + \beta^8 + \cdots) \\ &= \frac{\beta}{1-\beta^3} + \frac{\beta^2}{1-\beta^3} \\ &= \frac{\beta+\beta^2}{(1-\beta)(1+\beta+\beta^2)}, \end{aligned} \tag{39}$$

よって、

$$\bar{c}^2 = \frac{\beta+\beta^2}{1+\beta+\beta^2}. \tag{40}$$

(38) と (40) による消費配分は feasibility condition $\bar{c}^1 + \bar{c}^2 = 1$ を確かに満たしている。
　以上より、この経済における competitive equilibrium は

$$c_t^1 = \bar{c}^1 = \frac{1}{1+\beta+\beta^2}, \qquad \text{for all } t, \tag{41}$$

$$c_t^2 = \bar{c}^2 = \frac{\beta+\beta^2}{1+\beta+\beta^2}, \qquad \text{for all } t, \tag{42}$$

$$q_t^0 = \beta^t, \qquad \text{for all } t, \tag{43}$$

で与えられる。

(c). t 期の 0.05 単位の消費財の、0 期における価値は $0.05q_t^0$ である。従って、毎期 0.05 単位の消費財が受け取れるような証券の 0 期における価値は $\sum_{t=0}^{\infty} 0.05q_t^0$ と等しい。$q_t^0 = \beta^t$ を用いると、この証券の価格 P は、

$$\begin{aligned} P &= 0.05 + 0.05\beta + 0.05\beta^2 + \cdots \\ &= 0.05(1 + \beta + \beta^2 + \cdots). \end{aligned} \tag{44}$$

よって、

$$P = \frac{0.05}{1-\beta}. \tag{45}$$

問題3

<Proof of Proposition 3> (テキスト 222 ページ)

セットアップ：0 期の Arrow-Debreu 均衡

0 期の ADE の均衡条件を導出しておく。0 期の個人の最大化問題は、

$$\max_{\{c_t^i(s^t)\}_{t=0}^{\infty}} \quad \sum_{t=0}^{\infty}\sum_{s^t}\beta^t\pi_t(s^t)u[c_t^i(s^t)], \tag{46}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{t=0}^{\infty}\sum_{s^t}q_t^0(s^t)c_t^i(s^t) \leq \sum_{t=0}^{\infty}\sum_{s^t}q_t^0(s^t)y_t^i(s^t). \tag{47}$$

制約条件に掛かるラグランジュ乗数を μ_i と置くと、この最大化問題における必要条件は、$c_t^i(s^t)$ についての f.o.c.,

$$\beta^t\pi_t(s^t)u'[c_t^i(s^t)] = \mu_i q_t^0(s^t), \qquad \text{for all } t,\ s^t, \tag{48}$$

と、予算制約、

$$\sum_{t=0}^{\infty}\sum_{s^t}q_t^0(s^t)c_t^i(s^t) = \sum_{t=0}^{\infty}\sum_{s^t}q_t^0(s^t)y_t^i(s^t), \tag{49}$$

で与えられる。(48) について、任意の t 期 history s^t のものと 0 期のものの比をとり、$q_0^0(s^0)=1$ を用いると、

$$q_t^0(s^t) = \beta^t\pi_t(s^t)\frac{u'[c_t^i(s^t)]}{u'[c_0^i(s^0)]}, \qquad \text{for all } t,\ s^t. \tag{50}$$

均衡では、価格を所与として各個人が最適に消費量を選択しており（すなわち (50) と (49) が満たされており）、財の需要と供給が全ての期、history について一致している（すなわち feasibility を満たしている）。すなわち、0 期 ADE における各個人の消費の sequence $\{c_t^i(s^t)\}_{t=0}^{\infty}$ と price system $\{q_t^0(s^t)\}_{t=0}^{\infty}$ は、以下を満たす。

$$q_t^0(s^t) = \beta^t\pi_t(s^t)\frac{u'[c_t^i(s^t)]}{u'[c_0^i(s^0)]}, \qquad \text{for all } i,\ t,\ s^t, \tag{51}$$

$$\sum_{t=0}^{\infty}\sum_{s^t}q_t^0(s^t)c_t^i(s^t) = \sum_{t=0}^{\infty}\sum_{s^t}q_t^0(s^t)y_t^i(s^t), \qquad \text{for all } i, \tag{52}$$

$$\sum_i c_t^i(s^t) = \sum_i y_t^i(s^t) \qquad \text{for all } t,\ s^t. \tag{53}$$

さて、以上の均衡条件に基づき 0 期に取引を終えた経済が、ある t 期、history s^t に到達したとする。このとき τ 期 $(\tau \geq t)$、history s^τ の財を受け取るための Arrow-Debreu 証券の、t 期、s^t での価値は

$$\frac{q_\tau^0(s^\tau)}{q_t^0(s^t)} = \beta^{\tau-t}\pi_\tau(s^\tau|s^t)\frac{u'[c_\tau^i(s^\tau)]}{u'[c_t^i(s^t)]}, \qquad \text{for all } \tau \geq t,\ s^\tau|s^t, \tag{54}$$

で与えられる[4]。ただし、$c_t^i(s^t)$, $c_\tau^i(s^\tau)$ は、0 期の取引で決定していた消費配分を表す。また、t 期、s^t に到達したときの個人 i の wealth は

$$\Upsilon_t^i(s^t) = \sum_{\tau=t}^{\infty}\sum_{s^\tau|s^t}q_\tau^t(s^\tau)[c_\tau^i(s^\tau) - y_\tau^i(s^\tau)], \tag{55}$$

[4] テキスト 221 ページ、8.7.4. 節参照。

で与えられる。

t 期, s^t の再取引

0 期に取引を終えた経済である t 期、history s^t において再び Arrow-Debreu 証券市場が開かれたとする。この時、個人 i は以下の問題を解き直すことで、新たな消費配分 $\{\hat{c}^i_\tau(s^\tau)\}_{\tau=t}^\infty$ を決定することになる。

$$\max_{\{\hat{c}^i_\tau(s^\tau)\}_{\tau=t}^\infty} \quad \sum_{\tau=t}^{\infty}\sum_{s^\tau|s^t}\beta^{\tau-t}\pi_\tau(s^\tau|s^t)u[\hat{c}^i_\tau(s^\tau)], \tag{56}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{\tau=t}^{\infty}\sum_{s^\tau|s^t}q^t_\tau(s^\tau)\hat{c}^i_\tau(s^\tau) \leq \sum_{\tau=t}^{\infty}\sum_{s^\tau|s^t}q^t_\tau(s^\tau)y^i_\tau(s^\tau) + \Upsilon^i_t(s^t). \tag{57}$$

ただし、t 期 s^t に持ち越してきた wealth $\Upsilon^t_t(s^t)$ は (55) で与えられている。制約条件に掛かる新たなラグランジュ乗数を $\hat{\mu}_i$ と置くと、この最大化問題における必要条件は、$\hat{c}^i_\tau(s^\tau)$ についての f.o.c.,

$$\beta^{\tau-t}\pi_\tau(s^\tau|s^t)u'[\hat{c}^i_\tau(s^\tau)] = \hat{\mu}_i q^t_\tau(s^\tau), \qquad \text{for all } \tau,\ s^\tau, \tag{58}$$

と、予算制約、

$$\sum_{\tau=t}^{\infty}\sum_{s^\tau|s^t}q^t_\tau(s^\tau)\hat{c}^i_\tau(s^\tau) = \sum_{\tau=t}^{\infty}\sum_{s^\tau|s^t}q^t_\tau(s^\tau)y^i_\tau(s^\tau) + \Upsilon^i_t(s^t), \tag{59}$$

で与えられる。

f.o.c.(58) について、任意の τ 期 history s^τ のものと t 期、s^t のものの比をとり、$q^t_t(s^t) = 1$ を用いると、

$$q^t_\tau(s^\tau) = \beta^{\tau-t}\pi_\tau(s^\tau|s^t)\frac{u'[\hat{c}^i_\tau(s^\tau)]}{u'[\hat{c}^i_t(s^t)]}, \qquad \text{for all } \tau \geq t,\ s^\tau|s^t. \tag{60}$$

また、予算制約 (59) について、(55) より $\Upsilon^i_t(s^t)$ を代入して、

$$\begin{aligned}
\sum_{\tau=t}^{\infty}\sum_{s^\tau|s^t}q^t_\tau(s^\tau)\hat{c}^i_\tau(s^\tau) &= \sum_{\tau=t}^{\infty}\sum_{s^\tau|s^t}q^t_\tau(s^\tau)y^i_\tau(s^\tau) + \sum_{\tau=t}^{\infty}\sum_{s^\tau|s^t}q^t_\tau(s^\tau)[c^i_\tau(s^\tau) - y^i_\tau(s^\tau)], \\
&= \sum_{\tau=t}^{\infty}\sum_{s^\tau|s^t}q^t_\tau(s^\tau)c^i_\tau(s^\tau),
\end{aligned} \tag{61}$$

ただし、$c^i_\tau(s^\tau)$ は、0 期の取引で決定していた消費配分を表す。個人は、price system $\{q^t_\tau(s^\tau)\}_{\tau=t}^\infty$ を所与として、(60) と (61) を満たすように新たな消費配分 $\{\hat{c}^i_\tau(s^\tau)\}_{\tau=t}^\infty$ を決定せねばならない。

さて、ここで t 期、s^t で再び開かれた Arrow-Debreu 証券市場における price system $\{q^t_\tau(s^\tau)\}_{\tau=t}^\infty$ が (54) により与えられていたものと等しいとしよう。すなわち、

$$q^t_\tau(s^\tau) = \frac{q^0_\tau(s^\tau)}{q^0_t(s^t)} = \beta^{\tau-t}\pi_\tau(s^\tau|s^t)\frac{u'[c^i_\tau(s^\tau)]}{u'[c^i_t(s^t)]}, \tag{62}$$

このとき、各消費者が、0 期に決定していた通りの消費スケジュールを再び選択したとする。すなわち、

$$\hat{c}^i_\tau(s^\tau) = c^i_\tau(s^\tau), \qquad \text{for all } \tau \geq t,\ s^\tau|s^t. \tag{63}$$

このような選択は、(60) と (62) より、t 期の効用最大化問題の f.o.c. を満たしている。また、(61) より、予算制約も満たす。すなわち、price system $\{q^t_\tau(s^\tau)\}_{\tau=t}^{\infty}$ を所与としたとき、各消費者にとっては 0 期に選択した消費配分と同じ消費配分を選択することが最適となる。

また当然、各消費者が 0 期に決定していた消費配分を t 期、s^t に選択した場合、(53) より全ての τ 期、history s^τ の財についての Arrow-Debreu 証券の需給は一致する、すなわち feasibility は満たされる。

以上より、0 期に Arrow-Debreu 均衡を達成して取引を終了していた経済において、ある t 期、s^t に再び市場取引が再開されたとしても、price system $\{q^t_\tau(s^\tau)\}_{\tau=t}^{\infty}$ の下で、0 期に決定していた消費配分により均衡が達成される、すなわち、各消費者にとって選択を変更する誘引が存在せず、再取引は行われないということが示された。