マクロ経済II第六回宿題解答[†]

TA：荒渡良[‡]

問題1

(Exercise 8.1)

$$v_\theta(c) = \max_{c_1, c_2} \{\theta u(c_1) + (1-\theta)w(c_2)\}, \tag{1}$$

$$\text{s.t.} \quad c = c_1 + c_2. \tag{2}$$

制約条件 (2) を (1) の右辺に代入すると、(1) の右辺の最大化問題は

$$\max_{c_2} \{\theta u(c - c_2) + (1-\theta)w(c_2)\}, \tag{3}$$

と書き直せる。この問題の一階条件は

$$-\theta u'(c - c_2) + (1-\theta)w'(c_2) = 0. \tag{4}$$

$u(\cdot)$, $w(\cdot)$ が strictly concave であることより、(内点解の仮定の下で[1]) (4) を満たす c_2 は唯一存在する。この解を $c_2 = \phi(c)$ と定義すると、元の問題の解は

$$c_1^* = c - \phi(c), \quad c_2^* = \phi(c), \tag{5}$$

で与えられ、これを (1) の右辺に代入することで、

$$v_\theta(c) = \theta u(c - \phi(c)) + (1-\theta)w(\phi(c)), \tag{6}$$

が得られる。

以下では、最大化された value (6) と、これを得るための policy $\phi(c)$ の性質について調べる。(4) より policy function $\phi(c)$ は、任意の c に対して

$$\theta u'(c - \phi(c)) = (1-\theta)w'(\phi(c)), \tag{7}$$

[†]解答の作成にあたっては、経済学研究科 D1 の川元康一氏に協力して頂いた。

[‡]E-mail address:ege001ar@mail2.econ.osaka-u.ac.jp

[1]具体的には、例えばテキスト 209 ページで置かれているような

$$\lim_{c_1 \to 0} u(c_1) = +\infty, \quad \lim_{c_2 \to 0} w(c_2) = +\infty,$$

という仮定のもとでは、$0 < \theta < 1$ のもとで、この問題は内点解 $0 < c_2^* < c$ を与える。

を満たす。ここで、(6) の両辺を c で微分すると、

$$v_\theta'(c) = (1-\phi'(c))\theta u'(c-\phi(c)) + \phi'(c)(1-\theta)w'(\phi(c)). \tag{8}$$

ところが、この式の右辺について、(7) を用いると $\phi'(c)$ の掛かる項が打ち消しあうことになり、

$$v_\theta'(c) = \theta u'(c-\phi(c)). \tag{9}$$

(7) より、この右辺は $(1-\theta)w'(\phi(c))$ に等しく、さらに $c_1^* = c-\phi(c)$, $c_2^* = \phi(c)$ より、

$$v_\theta'(c) = \theta u'(c_1^*) = (1-\theta)w'(c_2^*), \tag{10}$$

が得られる。

次に、(7) の両辺を c について微分すると、

$$(1-\phi'(c))\theta u''(c-\phi(c)) = \phi'(c)(1-\theta)w''(\phi(c)). \tag{11}$$

これを $\phi'(c)$ について解くことで、

$$\phi'(c) = \frac{\theta u''(c-\phi(c))}{\theta u''(c-\phi(c)) + (1-\theta)w''(\phi(c))}. \tag{12}$$

この $\phi'(c)$ について、$u''(\cdot) < 0$, $w''(\cdot) < 0$ であることより、

$$\phi'(c) > 0, \tag{13}$$

である。ここで、(10) より、

$$\begin{aligned} v_\theta'(c) &= (1-\theta)w'(c_2^*), \\ &= (1-\theta)w'(\phi(c)), \end{aligned} \tag{14}$$

であり、これを c について微分すると

$$v_\theta''(c) = \phi'(c)(1-\theta)w''(\phi(c)), \tag{15}$$

となる。$w''(\cdot) < 0$ かつ、(13) から $\phi'(c) > 0$ であるから、この $v_\theta''(c)$ は負となり、関数 $v_\theta(c)$ は c についての凹関数となる。

問題 2

(Exercise 8.4)
この経済における t 期の state s_t は成長率 λ_t であり、history s^t は、0 期から t 期までの、この成長率の実現値の流列で与えられる。以下では、この経済の t 期の history を λ^t で表す。

(a). Competitive Equilibrium とは、代表的消費者の消費の sequence $\{c_t(\lambda^t)\}_{t=0}^\infty$ と price system $\{q_t^0(\lambda^t)\}_{t=0}^\infty$ が、以下の 2 つの性質を満たしている状態のことである。

- 消費の sequence $\{c_t(\lambda^t)\}_{t=0}^{\infty}$ が feasible allocation である。
- $\{c_t(\lambda^t)\}_{t=0}^{\infty}$ が、price system $\{q_t^0(\lambda^t)\}_{t=0}^{\infty}$ を所与とした下で消費者にとって最適なものとなっている。

(b). まずは、competitive equilibrium における消費の sequence と price system を解析的に求める。代表的消費者の直面する問題は、

$$\max \quad \sum_{t=0}^{\infty}\sum_{\lambda^t}\beta^t\frac{c_t(\lambda^t)^{1-\gamma}}{1-\gamma}\pi_t(\lambda^t), \tag{16}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{t=0}^{\infty}\sum_{\lambda^t}c_t(\lambda^t)q_t^0(\lambda^t) \le \sum_{t=0}^{\infty}\sum_{\lambda^t}d_t(\lambda^t)q_t^0(\lambda^t), \tag{17}$$

と定式化される。制約条件式に掛かるラグランジュ乗数を μ とし、この問題のラグランジュ関数を $\mathcal{L}$ と定義すると、

$$\mathcal{L} = \sum_{t=0}^{\infty}\sum_{\lambda^t}\beta^t\frac{c_t(\lambda^t)^{1-\gamma}}{1-\gamma}\pi_t(\lambda^t) + \mu\left\{\sum_{t=0}^{\infty}\sum_{\lambda^t}\big(d_t(\lambda^t)-c_t(\lambda^t)\big)\,q_t^0(\lambda^t)\right\}. \tag{18}$$

$c_t(\lambda^t)$ についての f.o.c. は、

$$\beta^t c_t(\lambda^t)^{-\gamma}\pi_t(\lambda^t) = \mu q_t^0(\lambda^t), \quad \text{for all} \quad t,\ \lambda^t. \tag{19}$$

任意の t, λ^t のものと、$t=0$ のものとの比をとると、

$$\frac{\beta^t c_t(\lambda^t)^{-\gamma}\pi_t(\lambda^t)}{\beta^0 c_0(\lambda^0)^{-\gamma}\pi_0(\lambda^0)} = \frac{q_t^0(\lambda^t)}{q_0^0(\lambda^t)}. \tag{20}$$

$\lambda^0 = \lambda_0$ は既知となっている状況を考えているため $\pi_0(\lambda^0)=1$ である。また、市場価格は 0 期の消費財単位で測られているため $q_0^0(\lambda^0)=1$ である。従って、

$$q_t^0(\lambda^t) = \beta^t\pi_t(\lambda^t \mid \lambda_0)\left[\frac{c_t(\lambda^t)}{c_0(\lambda_0)}\right]^{-\gamma}. \tag{21}$$

ここで、feasibility の条件より、

$$c_t(\lambda^t) = d_t(\lambda^t), \quad \text{for all } t,\ \lambda^t. \tag{22}$$

また、$d_0 = 1$ より、

$$d_t = \lambda_t d_{t-1} = \lambda_t\lambda_{t-1}d_{t-2} = \cdots = \prod_{j=0}^{t-1}\lambda_{t-j}d_0 = \prod_{j=0}^{t-1}\lambda_{t-j}. \tag{23}$$

よって、

$$c_t(\lambda^t) = d_t(\lambda^t) = \prod_{j=0}^{t-1}\lambda_{t-j}, \tag{24}$$

であり、これを (21) に代入して、

$$q_t^0(\lambda^t) = \beta^t \pi_t(\lambda^t \mid \lambda_0) \left\{ \prod_{j=0}^{t-1} \lambda_{t-j} \right\}^{-\gamma}, \tag{25}$$

が得られる。

さて、(25) に、$\gamma = 2,\ \beta = 0.95,\ \lambda_0 = 0.97,\ (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5) = (0.97, 0.97, 1.03, 0.97, 1.03)$ を代入する。この history が生起する確率が $0.8 \times 0.8 \times 0.2 \times 0.1 \times 0.2$ であることに注意して、

$$\begin{aligned} q_5^0(\lambda^5) &= 0.95^5 \times (0.8 \times 0.8 \times 0.2 \times 0.1 \times 0.2) \times (0.97 \times 0.97 \times 1.03 \times 0.97 \times 1.03)^{-2} \\ &= 0.0021. \end{aligned} \tag{26}$$

(c). (25) に、$\gamma = 2,\ \beta = 0.95,\ \lambda_0 = 0.97,\ (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5) = (1.03, 1.03, 1.03, 1.03, 0.97)$ を代入する。この history が生起する確率が $0.2 \times 0.9 \times 0.9 \times 0.9 \times 0.1$ であることに注意して、

$$\begin{aligned} q_5^0(\lambda^5) &= 0.95^5 \times (0.2 \times 0.9 \times 0.9 \times 0.9 \times 0.1) \times (1.03 \times 1.03 \times 1.03 \times 1.03 \times 0.97)^{-2} \\ &= 0.0095. \end{aligned} \tag{27}$$

(d). 0 期から無限期先に渡って代表的個人が受け取る endowment の流列の 0 期における市場価値 (the price of a claim on the entire endowment sequence) を導出する。これを Q と置く。Q は 0 期以降の全ての期の、起こりうる全ての history での endowment の市場価値の和である。ある t 期の、ある history λ^t での endowment $d_t(\lambda^t)$ の市場価値は $q_t^0(\lambda^t)d_t(\lambda^t)$ である。従って、これの全ての $t,\ \lambda^t$ についての総和は

$$Q = \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{\lambda^t} q_t^0(\lambda^t) d_t(\lambda^t). \tag{28}$$

さて、先に導出した (21) をこれに代入して、feasibility condition $c_t(\lambda^t) = d_t(\lambda^t)$ を用いると、

$$\begin{aligned} Q &= \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{\lambda^t} \beta^t \pi_t(\lambda^t \mid \lambda_0) \left[\frac{d_t(\lambda^t)}{d_0(\lambda_0)} \right]^{-\gamma} d_t(\lambda^t) \\ &= \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{\lambda^t} \beta^t \pi_t(\lambda^t \mid \lambda_0) d_0(\lambda_0)^{\gamma} d_t(\lambda^t)^{1-\gamma} \\ &= \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{\lambda^t} \beta^t \pi_t(\lambda^t \mid \lambda_0) d_0(\lambda_0)^{\gamma} \left\{ \lambda_t \lambda_{t-1} \cdots \lambda_1 d_0(\lambda_0) \right\}^{1-\gamma} \\ &= d_0(\lambda_0) \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{\lambda^t} \beta^t \pi_t(\lambda^t \mid \lambda_0) \left\{ \lambda_t \lambda_{t-1} \cdots \lambda_1 \right\}^{1-\gamma}. \end{aligned} \tag{29}$$

ここで、初期条件が $\lambda_0 = \bar{\lambda}_i\ (i = 1,\ 2)$ の時の claim の価格を Q_i と置くと、

$$Q_i = d_0(\lambda_0 = \bar{\lambda}_i) \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{\lambda^t} \beta^t \pi_t(\lambda^t \mid \lambda_0 = \bar{\lambda}_i) \left\{ \lambda_t \lambda_{t-1} \cdots \lambda_1 \right\}^{1-\gamma}. \tag{30}$$

さらに、$Q_i/d_0(\lambda_0 = \bar{\lambda}_i) = k_i$ と置くと、

$$k_i = \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{\lambda^t} \beta^t \pi_t(\lambda^t \mid \lambda_0 = \bar{\lambda}_i) \{\lambda_t \lambda_{t-1} \cdots \lambda_1\}^{1-\gamma} . \tag{31}$$

この k_i を求めれば Q_i が求まるが、k_i を直接計算することは、無限期先までの無限通りの history についての和を計算することであり、不可能である。そこで、以下のような工夫をする。この k_i について、

$$\begin{aligned}
k_i &= \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{\lambda^t} \beta^t \pi_t(\lambda^t \mid \lambda_0 = \bar{\lambda}_i) \{\lambda_t \lambda_{t-1} \cdots \lambda_1\}^{1-\gamma} \\
&= \beta^0 \pi_0(\lambda^0 \mid \lambda_0 = \bar{\lambda}_i) + \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{\lambda^t} \beta^t \pi_t(\lambda^t \mid \lambda_0 = \bar{\lambda}_i) \{\lambda_t \lambda_{t-1} \cdots \lambda_1\}^{1-\gamma} \\
&= 1 + \beta \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{\lambda^t} \beta^{t-1} \pi_t(\lambda^t \mid \lambda_0 = \bar{\lambda}_i) \{\lambda_t \lambda_{t-1} \cdots \lambda_1\}^{1-\gamma} \\
&= 1 + P_{i1} \beta \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{\lambda^t} \beta^{t-1} \pi_t(\lambda^t \mid \lambda_1 = \bar{\lambda}_1) \bar{\lambda}_1^{1-\gamma} \{\lambda_t \lambda_{t-1} \cdots \lambda_2\}^{1-\gamma} \\
&\qquad + P_{i2} \beta \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{\lambda^t} \beta^{t-1} \pi_t(\lambda^t \mid \lambda_1 = \bar{\lambda}_2) \bar{\lambda}_2^{1-\gamma} \{\lambda_t \lambda_{t-1} \cdots \lambda_2\}^{1-\gamma} \\
&= 1 + P_{i1} \beta \bar{\lambda}_1^{1-\gamma} \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{\lambda^t} \beta^{t-1} \pi_t(\lambda^t \mid \lambda_1 = \bar{\lambda}_1) \{\lambda_t \lambda_{t-1} \cdots \lambda_2\}^{1-\gamma} \\
&\qquad + P_{i2} \beta \bar{\lambda}_2^{1-\gamma} \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{\lambda^t} \beta^{t-1} \pi_t(\lambda^t \mid \lambda_1 = \bar{\lambda}_2) \{\lambda_t \lambda_{t-1} \cdots \lambda_2\}^{1-\gamma} ,
\end{aligned} \tag{32}$$

ただし、P_{ij} は問題で与えられている通り、state i から state j への遷移確率を表す。

ここで、今は無限期間問題の和を考えているので、初期が 0 期か 1 期かは和の値に影響してこない、すなわち、

$$\begin{aligned}
\sum_{t=1}^{\infty} \sum_{\lambda^t} \beta^{t-1} \pi_t(\lambda^t \mid \lambda_1 = \bar{\lambda}_i) \{\lambda_t \lambda_{t-1} \cdots \lambda_2\}^{1-\gamma} &= \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{\lambda^t} \beta^t \pi_t(\lambda^t \mid \lambda_0 = \bar{\lambda}_i) \{\lambda_t \lambda_{t-1} \cdots \lambda_1\}^{1-\gamma} \\
&= k_i ,
\end{aligned} \tag{33}$$

である[2]。これより、

$$k_i = 1 + \beta \left\{ P_{i1} \bar{\lambda}_1^{1-\gamma} k_1 + P_{i2} \bar{\lambda}_2^{1-\gamma} k_2 \right\} . \tag{34}$$

これを $i = 1, 2$ の場合について書くと、

$$k_1 = 1 + \beta \left\{ P_{11} \bar{\lambda}_1^{1-\gamma} k_1 + P_{12} \bar{\lambda}_2^{1-\gamma} k_2 \right\} , \tag{35}$$

$$k_2 = 1 + \beta \left\{ P_{21} \bar{\lambda}_1^{1-\gamma} k_1 + P_{22} \bar{\lambda}_2^{1-\gamma} k_2 \right\} . \tag{36}$$

[2] このような工夫が出来る理由は、無限級数について考えているということの他に、state λ_t が Markov process に従っていること、すなわち、1 期における 1 期より先の各 history が生起する条件付確率は 1 期の state λ_1 のみに依存する（λ_0 に依存しない）ということである。

これらの $k_1,\, k_2$ についての連立方程式を解くと、

$$k_1 = \frac{1-\beta P_{22}\bar{\lambda}_2^{1-\gamma}+\beta P_{12}\bar{\lambda}_2^{1-\gamma}}{(1-\beta P_{11}\bar{\lambda}_1^{1-\gamma})(1-\beta P_{22}\bar{\lambda}_2^{1-\gamma})-(\beta P_{12}\bar{\lambda}_2^{1-\gamma})(\beta P_{21}\bar{\lambda}_1^{1-\gamma})}, \tag{37}$$

$$k_2 = \frac{1-\beta P_{11}\bar{\lambda}_1^{1-\gamma}+\beta P_{21}\bar{\lambda}_1^{1-\gamma}}{(1-\beta P_{11}\bar{\lambda}_1^{1-\gamma})(1-\beta P_{22}\bar{\lambda}_2^{1-\gamma})-(\beta P_{21}\bar{\lambda}_1^{1-\gamma})(\beta P_{12}\bar{\lambda}_2^{1-\gamma})}. \tag{38}$$

以上より、初期条件 $\lambda_0 = \bar{\lambda}_i,\ d_0(\lambda_0 = \bar{\lambda}_i),\ (i = 1,\, 2)$ が与えられた下での、entire endowment sequence への請求権の価格 Q_i はそれぞれ、

$$Q_1 = k_1 d_0(\lambda_0 = \bar{\lambda}_1) = \frac{\left(1-\beta P_{22}\bar{\lambda}_2^{1-\gamma}+\beta P_{12}\bar{\lambda}_2^{1-\gamma}\right) d_0(\lambda_0 = \bar{\lambda}_1)}{(1-\beta P_{11}\bar{\lambda}_1^{1-\gamma})(1-\beta P_{22}\bar{\lambda}_2^{1-\gamma})-(\beta P_{12}\bar{\lambda}_2^{1-\gamma})(\beta P_{21}\bar{\lambda}_1^{1-\gamma})} = 18.9332, \tag{39}$$

$$Q_2 = k_2 d_0(\lambda_0 = \bar{\lambda}_2) = \frac{\left(1-\beta P_{11}\bar{\lambda}_1^{1-\gamma}+\beta P_{21}\bar{\lambda}_1^{1-\gamma}\right) d_0(\lambda_0 = \bar{\lambda}_2)}{(1-\beta P_{11}\bar{\lambda}_1^{1-\gamma})(1-\beta P_{22}\bar{\lambda}_2^{1-\gamma})-(\beta P_{21}\bar{\lambda}_1^{1-\gamma})(\beta P_{12}\bar{\lambda}_2^{1-\gamma})} = 167995, \tag{40}$$

と求められる。

(e). 第 5 期の state が $\lambda_5 = \bar{\lambda}_1 (= 0.97)$ であれば、1 単位の消費財を受け取ることが出来る証券の、0 期における価格を考える。第 1 期から第 4 期までの 4 期において、各期それぞれ 2 種類の state が生起しうるので、$\lambda_5 = \bar{\lambda}_1$ となる history は $2^4 = 16$ 通りあることになる。いま考えている証券を 1 単位保有することは、この 16 通りの history 全ての Arrow-Debreu 証券を 1 単位ずつ保有することと等しい。従って、本問題の証券の価格は、この 16 種類の Arrow-Debreu 証券の価格の和で与えられる。

今、(21) と $d_0 = 1,\ \lambda_0 = \bar{\lambda}_1$ であることより、16 通りの内のある一つの history λ^5 についての Arrow-Debreu 証券の価格は、

$$q_5^0(\lambda^5) = \beta^5 \pi_5(\lambda^5 \mid \lambda_0 = \bar{\lambda}_1) d_5(\lambda^5)^{-\gamma}, \tag{41}$$

で与えられる。

$t = 1,\, 2,\, 3,\, 4$ の各期の state が $\bar{\lambda}_{j_t}$ $(j_t = 1,\, 2)$ で、第 5 期の state が $\bar{\lambda}_1$ という history が生起する確率 $\pi_5(\lambda^5 \mid \lambda_0 = \bar{\lambda}_1)$ は、

$$\pi_5(\lambda^5 \mid \lambda_0 = \bar{\lambda}_1) = P_{j_4,1}P_{j_3,j_4}P_{j_2,j_3}P_{j_1,j_2}P_{1,j_1}. \tag{42}$$

また、この history が生起したときの endowment $d_5(\lambda^5)$ は

$$d_5(\lambda^5) = \lambda_5\lambda_4\lambda_3\lambda_2\lambda_1 = \bar{\lambda}_1\bar{\lambda}_{j_4}\bar{\lambda}_{j_3}\bar{\lambda}_{j_2}\bar{\lambda}_{j_1}. \tag{43}$$

従って、この history についての Arrow-Debreu 証券の価格は、

$$q_5^0(\lambda^5) = \beta^5 P_{j_4,1}P_{j_3,j_4}P_{j_2,j_3}P_{j_1,j_2}P_{1,j_1}\left(\bar{\lambda}_1\bar{\lambda}_{j_4}\bar{\lambda}_{j_3}\bar{\lambda}_{j_2}\bar{\lambda}_{j_1}\right)^{-\gamma}. \tag{44}$$

従って、いま考えている証券の価格を $q_5^0(\lambda_5 = \bar{\lambda}_1)$ と置くと、

$$q_5^0(\lambda_5 = \bar{\lambda}_1) = \beta^5 \sum_{j_4=1}^{2}\sum_{j_3=1}^{2}\sum_{j_2=1}^{2}\sum_{j_1=1}^{2} P_{j_4,1}P_{j_3,j_4}P_{j_2,j_3}P_{j_1,j_2}P_{1,j_1}\left(\bar{\lambda}_1\bar{\lambda}_{j_4}\bar{\lambda}_{j_3}\bar{\lambda}_{j_2}\bar{\lambda}_{j_1}\right)^{-\gamma}, \tag{45}$$

となる。これを行列を用いて表すと、

$$q_5^0(\lambda_5 = \bar{\lambda}_1) = \beta^5 \mathbf{R}_{11}^5, \tag{46}$$

ただし、行列 $\mathbf{R}$ は

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} P_{11}\bar{\lambda}_1^{-\gamma} & P_{12}\bar{\lambda}_2^{-\gamma} \\ P_{21}\bar{\lambda}_1^{-\gamma} & P_{22}\bar{\lambda}_2^{-\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 \times 0.97^{-2} & 0.2 \times 1.03^{-2} \\ 0.1 \times 0.97^{-2} & 0.9 \times 1.03^{-2} \end{bmatrix}, \tag{47}$$

であり、$\mathbf{R}_{11}^5$ は行列 $\mathbf{R}^5$ の 1 行 1 列の要素を表す。この行列について、

$$\mathbf{R}^5 = \begin{bmatrix} 0.5689 & 0.5177 \\ 0.2919 & 0.5637 \end{bmatrix}, \tag{48}$$

であることより、$\lambda_5 = \bar{\lambda}_1$ である時に 1 単位の消費財が受け取れる証券の価格は、

$$q_5^0(\lambda_5 = \bar{\lambda}_1) = 0.95^5 \times 0.5689 = 0.4402, \tag{49}$$

と求められる。