マクロ経済II第五回宿題解答†

TA：荒渡良‡

問題1

(a). 2つの問題、

$$\max \quad -\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_t \\ \mathbf{u}_t \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} R_t & W_t \\ W_t' & Q_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_t \\ \mathbf{u}_t \end{bmatrix} - \mathbf{x}_{t_1}' P_{t_1} \mathbf{x}_{t_1}, \tag{B.2.2}$$

$$\text{s.t.} \quad \mathbf{x}_{t+1} = A_t \mathbf{x}_t + B_t \mathbf{u}_t, \tag{B.2.2'}$$

と、

$$\min \quad \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \left\{ \mathbf{x}_t'(R_t - W_t Q_t^{-1} W_t')\mathbf{x}_t + \mathbf{u}_t^{*\prime} Q_t \mathbf{u}_t^* \right\} + \mathbf{x}_{t_1}' P_{t_1} \mathbf{x}_{t_1}, \tag{B.3.1}$$

$$\text{s.t.} \quad \mathbf{x}_{t+1} = (A_t - B_t Q_t^{-1} W_t')\mathbf{x}_t + B_t \mathbf{u}_t^*, \tag{B.3.2}$$

が同値であることを示す。ただし、定義しなおされた control variable $\mathbf{u}_t^*$ は

$$\mathbf{u}_t^* = Q_t^{-1} W_t' \mathbf{x}_t + \mathbf{u}_t, \tag{B.3.3}$$

により与えられる[1]。

まず、state variable の law of motion が2つの問題で一致していることを示す。二つ目の問題の law of motion (B.3.2) に $\mathbf{u}_t^*$ の定義 (B.3.3) を代入して整理していくと、

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_{t+1} &= (A_t - B_t Q_t^{-1} W_t')\mathbf{x}_t + B_t \mathbf{u}_t^* \\
&= (A_t - B_t Q_t^{-1} W_t')\mathbf{x}_t + B_t(Q_t^{-1} W_t' \mathbf{x}_t + \mathbf{u}_t) \\
&= A_t \mathbf{x}_t - B_t Q_t^{-1} W_t' \mathbf{x}_t + B_t Q_t^{-1} W_t' \mathbf{x}_t + B_t \mathbf{u}_t \\
&= A_t \mathbf{x}_t + B_t \mathbf{u}_t.
\end{aligned}$$

最後の式は、一つ目の問題の state の law of motion (B.2.2') と一致しており、すなわち二つの問題で、制約条件式である law of motion は同値である。

---

† 解答の作成にあたっては、経済学研究科 D1 の川元康一氏に協力して頂いた。

‡ E-mail address:ege001ar@mail2.econ.osaka-u.ac.jp

[1] (B.3.3) より、（$\mathbf{x}_t$ を given として、）$\mathbf{u}_t$ の値の選択と $\mathbf{u}_t^*$ の値の選択は1対1に対応している。

次に、目的関数が二つの問題で一致していることを示す。まず (B.3.1) について、

$$\begin{aligned}
&\min \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \left\{ \mathbf{x}_t'(R_t - W_t Q_t^{-1} W_t')\mathbf{x}_t + \mathbf{u}_t^{*\prime} Q_t \mathbf{u}_t^* \right\} + \mathbf{x}_{t_1}' P_{t_1} \mathbf{x}_{t_1} \\
&\quad = \max \ -\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \left\{ \mathbf{x}_t'(R_t - W_t Q_t^{-1} W_t')\mathbf{x}_t + \mathbf{u}_t^{*\prime} Q_t \mathbf{u}_t^* \right\} - \mathbf{x}_{t_1}' P_{t_1} \mathbf{x}_{t_1}. \qquad (1)
\end{aligned}$$

ここで (1) の括弧の中身について、

$$\begin{aligned}
&\mathbf{x}_t'(R_t - W_t Q_t^{-1} W_t')\mathbf{x}_t + \mathbf{u}_t^{*\prime} Q_t \mathbf{u}_t^* \\
&\quad = -\mathbf{x}_t' R_t \mathbf{x}_t + \mathbf{x}_t' W_t Q_t^{-1} W_t' \mathbf{x}_t - (Q_t^{-1} W_t' \mathbf{x}_t + \mathbf{u}_t)' Q_t (Q_t^{-1} W_t' \mathbf{x}_t + \mathbf{u}_t) \\
&\quad = -\mathbf{x}_t' R_t \mathbf{x}_t + \mathbf{x}_t' W_t Q_t^{-1} W_t' \mathbf{x}_t - \mathbf{x}_t' W_t (Q_t^{-1})' Q_t Q_t^{-1} W_t' \mathbf{x}_t \\
&\qquad\qquad - \mathbf{x}_t' W_t (Q_t^{-1})' Q_t \mathbf{u}_t - \mathbf{u}_t' Q_t Q_t^{-1} W_t' \mathbf{x}_t - \mathbf{u}_t' Q_t \mathbf{u}_t, \qquad (2)
\end{aligned}$$

Q_t は symmetric なので $Q_t = Q_t'$. 従って、$Q_t Q_t^{-1} = Q_t' Q_t^{-1} = I$. 単位行列は転置しても同じ行列なので、$Q_t' Q_t^{-1} = (Q_t^{-1})' Q_t = I$. これを用いると、

$$\begin{aligned}
(2) &= -\mathbf{x}_t' R_t \mathbf{x}_t + \mathbf{x}_t' W_t Q_t^{-1} W_t' \mathbf{x}_t - \mathbf{x}_t' W_t Q_t^{-1} W_t' \mathbf{x}_t - \mathbf{x}_t' W_t \mathbf{u}_t - \mathbf{u}_t' W_t' \mathbf{x}_t - \mathbf{u}_t' Q_t \mathbf{u}_t \\
&= -\mathbf{x}_t' R_t \mathbf{x}_t - 2\mathbf{u}_t' W_t' \mathbf{x}_t - \mathbf{u}_t' Q_t \mathbf{u}_t \\
&= -\begin{bmatrix} \mathbf{x}_t \\ \mathbf{u}_t \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} R_t & W_t \\ W_t' & Q_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_t \\ \mathbf{u}_t \end{bmatrix}. \qquad (3)
\end{aligned}$$

(1), (2), (3) より、

$$\begin{aligned}
&\min \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \left\{ \mathbf{x}_t'(R_t - W_t Q_t^{-1} W_t')\mathbf{x}_t + \mathbf{u}_t^{*\prime} Q_t \mathbf{u}_t^* \right\} + \mathbf{x}_{t_1}' P_{t_1} \mathbf{x}_{t_1} \\
&\quad = \max \ -\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_t \\ \mathbf{u}_t \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} R_t & W_t \\ W_t' & Q_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_t \\ \mathbf{u}_t \end{bmatrix} - \mathbf{x}_{t_1}' P_{t_1} \mathbf{x}_{t_1}. \qquad (4)
\end{aligned}$$

すなわち、二つの問題の目的関数 (B.2.2) と (B.3.1) は同値である。
以上より、二つの問題が同値であるといえる。

(b). 二つの問題の feedback rule が

$$F_t = \overline{F}_t + Q_t^{-1} W_t', \qquad (5)$$

という関係を満たすことを示す。ただし、

$$F_t = (Q_t + B_t' P_{t+1} B_t)^{-1} (B_t' P_{t+1} A_t + W_t'), \qquad (6)$$

$$\overline{F}_t = (Q_t + B_t' P_{t+1} B_t)^{-1} B_t' P_{t+1} \overline{A}_t, \qquad (7)$$

$$\overline{A}_t = A_t - B_t Q_t^{-1} W_t', \qquad (8)$$

である。

$$\begin{aligned}
\overline{F}_t + Q_t^{-1}W_t' &= (Q_t + B_t'P_{t+1}B_t)^{-1}B_t'P_{t+1}(A_t - B_tQ_t^{-1}W_t') + Q_t^{-1}W_t' \\
&= (Q_t + B_t'P_{t+1}B_t)^{-1}B_t'P_{t+1}A_t - (Q_t + B_t'P_{t+1}B_t)^{-1}B_t'P_{t+1}B_tQ_t^{-1}W_t' + Q_t^{-1}W_t' \\
&= (Q_t + B_t'P_{t+1}B_t)^{-1}B_t'P_{t+1}A_t \\
&\quad - (Q_t + B_t'P_{t+1}B_t)^{-1}\left\{B_t'P_{t+1}B_tQ_t^{-1}W_t' - (Q_t + B_t'P_{t+1}B_t)Q_t^{-1}W_t'\right\} \\
&= (Q_t + B_t'P_{t+1}B_t)^{-1}B_t'P_{t+1}A_t \\
&\quad - (Q_t + B_t'P_{t+1}B_t)^{-1}\left\{B_t'P_{t+1}B_tQ_t^{-1}W_t' - Q_tQ_t^{-1}W_t' - B_t'P_{t+1}B_tQ_t^{-1}W_t'\right\} \\
&= (Q_t + B_t'P_{t+1}B_t)^{-1}B_t'P_{t+1}A_t + (Q_t + B_t'P_{t+1}B_t)^{-1}W_t' \\
&= (Q_t + B_t'P_{t+1}B_t)^{-1}(B_t'P_{t+1}A_t + W_t') \\
&= F_t \qquad (9)
\end{aligned}$$

よって、$F_t = \overline{F}_t + Q_t^{-1}W_t'$ である。

(c). 二つの問題において value function を求めるための、それぞれの Riccati equation、

$$\begin{aligned}
P_t &= R_t + A_t'P_{t+1}A_t - (A_t'P_{t+1}B_t + W_t)(Q_t + B_t'P_{t+1}B_t)^{-1}(B_t'P_{t+1}A_t + W_t') \qquad \text{(B.2.8)} \\
&= R_t + A_t'P_{t+1}A_t - (A_t'P_{t+1}B_t + W_t)F_t, \qquad \text{(B.2.8')}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_t &= \overline{R}_t + \overline{A}_t'P_{t+1}\overline{A}_t - \overline{A}_t'P_{t+1}B_t(Q_t + B_t'P_{t+1}B_t)^{-1}B_t'P_{t+1}\overline{A}_t \qquad \text{(B.3.9)} \\
&= \overline{R}_t + \overline{A}_t'P_{t+1}\overline{A}_t - \overline{A}_t'P_{t+1}B_t\overline{F}_t, \qquad \text{(B.3.9')}
\end{aligned}$$

の二つが同値な式であることを示す[2]。ただし、

$$\overline{R}_t = R_t - W_tQ_t^{-1}W_t', \qquad \text{(B.3.6)}$$

である。

前問 (b) で得た $\overline{F}_t = F_t - Q_t^{-1}W_t'$ を用いて (B.3.9') を変形していくと、

$$\begin{aligned}
P_t &= \overline{R}_t + \overline{A}_t'P_{t+1}\overline{A}_t - \overline{A}_t'P_{t+1}B_tF_t + \overline{A}_t'P_{t+1}B_tQ_t^{-1}W_t' \\
&= \overline{R}_t + \overline{A}_t'P_{t+1}\left(\overline{A}_t - B_tF_t + B_tQ_t^{-1}W_t'\right) \\
&= \overline{R}_t + \overline{A}_t'P_{t+1}\left(A_t - B_tQ_t^{-1}W_t' - B_tF_t + B_tQ_t^{-1}W_t'\right) \\
&= \overline{R}_t + \overline{A}_t'P_{t+1}\left(A_t - B_tF_t\right) \\
&= \overline{R}_t + (A_t - B_tQ_t^{-1}W_t')'P_{t+1}\left(A_t - B_tF_t\right) \\
&= \overline{R}_t + A_t'P_{t+1}A_t - A_t'P_{t+1}B_tF_t - W_t(Q_t^{-1})'B_t'P_{t+1}A_t + W_t(Q_t^{-1})'B_t'P_{t+1}B_tF_t \\
&= R_t - W_tQ_t^{-1}W_t' + A_t'P_{t+1}A_t - A_t'P_{t+1}B_tF_t - W_t(Q_t^{-1})'B_t'P_{t+1}A_t + W_t(Q_t^{-1})'B_t'P_{t+1}B_tF_t \\
&= R_t + A_t'P_{t+1}A_t - A_t'P_{t+1}B_tF_t - W_t\left(Q_t^{-1}W_t' + (Q_t^{-1})'B_t'P_{t+1}A_t - (Q_t^{-1})'B_t'P_{t+1}B_tF_t\right). \qquad (10)
\end{aligned}$$

[2] (B.2.8'), (B.3.9') への変形は、それぞれ F_t, $\overline{F}_t$ の定義による。

ここで、Q_t はsymmetricであることから、$(Q_t^{-1})' = Q_t^{-1}$. よって、

$$(10) = R_t + A_t' P_{t+1} A_t - A_t' P_{t+1} B_t F_t - W_t Q_t^{-1} \left(W_t' + B_t' P_{t+1} A_t - B_t' P_{t+1} B_t F_t \right). \tag{11}$$

$F_t = (Q_t + B_t' P_{t+1} B_t)^{-1} (B_t' P_{t+1} A_t + W_t')$ より、$W_t' + B_t' P_{t+1} A_t = (Q_t + B_t' P_{t+1} B_t) F_t$. よって、

$$\begin{aligned}
(11) &= R_t + A_t' P_{t+1} A_t - A_t' P_{t+1} B_t F_t - W_t Q_t^{-1} \left\{ (Q_t + B_t' P_{t+1} B_t) F_t - B_t' P_{t+1} B_t F_t \right\} \\
&= R_t + A_t' P_{t+1} A_t - A_t' P_{t+1} B_t F_t - W_t F_t \\
&= R_t + A_t' P_{t+1} A_t - \left(A_t' P_{t+1} B_t + W_t \right) F_t.
\end{aligned} \tag{12}$$

これは (B.2.8') の右辺と一致している。

以上より、二つの Riccati equation (B.2.8) と (B.3.9) は同値である。

(d). 二つの問題の optimal closed loof system が同等であること、すなわち、

$$A_t - B_t F_t = \overline{A}_t - B_t \overline{F}_t, \tag{13}$$

であることを示す。

$\overline{A}_t, \overline{F}_t$ の定義を用いて $\overline{A}_t - B_t \overline{F}_t$ を変形していくと、

$$\begin{aligned}
&\overline{A}_t - B_t \overline{F}_t \\
&\quad = (A_t - B_t Q_t^{-1} W_t') - B_t (Q_t + B_t' P_{t+1} B_t)^{-1} B_t' P_{t+1} (A_t - B_t Q_t^{-1} W_t') \\
&\quad = A_t - B_t \left\{ Q_t^{-1} W_t' + (Q_t + B_t' P_{t+1} B_t)^{-1} B_t' P_{t+1} (A_t - B_t Q_t^{-1} W_t') \right\} \\
&\quad = A_t - B_t (Q_t + B_t' P_{t+1} B_t)^{-1} \left\{ (Q_t + B_t' P_{t+1} B_t) Q_t^{-1} W_t' + B_t' P_{t+1} (A_t - B_t Q_t^{-1} W_t') \right\} \\
&\quad = A_t - B_t (Q_t + B_t' P_{t+1} B_t)^{-1} \left\{ W_t' + B_t' P_{t+1} B_t Q_t^{-1} W_t' + B_t' P_{t+1} A_t - B_t' P_{t+1} B_t Q_t^{-1} W_t' \right\} \\
&\quad = A_t - B_t (Q_t + B_t' P_{t+1} B_t)^{-1} (W_t' + B_t' P_{t+1} A_t) \\
&\quad = A_t - B_t F_t.
\end{aligned} \tag{14}$$

以上より、$A_t - B_t F_t = \overline{A}_t - B_t \overline{F}_t$ である。

問題2

$$\max_{\{c_t, i_t\}} \quad - \sum_{t=1}^{\infty} (0.9)^t \left\{ (50 - c_t)^2 + i_t^2 \right\}, \tag{15}$$

$$\text{s.t.} \quad c_t + i_t = 0.2 a_t + y_t, \tag{16}$$

$$a_{t+1} = a_t + i_t, \tag{17}$$

$$y_{t+1} = 5 + 0.7 y_t - 0.2 y_{t-1}. \tag{18}$$

(問題 2-1)
$\mathbf{x}_t = [1, a_t, y_t, y_{t-1}]'$, $\mathbf{u}_t = [i_t]$ と置くと、この問題の二つの制約式 (17)–(18) は

$$\begin{bmatrix} 1 \\ a_{t+1} \\ y_{t+1} \\ y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0.7 & -0.2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_t \\ y_t \\ y_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} i_t, \tag{19}$$

と書き換えられる。従って、

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0.7 & -0.2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{20}$$

とおくと、

$$\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_t + \mathbf{B}\mathbf{u}_t, \tag{21}$$

と出来る。次に、pay-off function を $g(c_t, i_t)$ とおくと、(16) を用いて

$$\begin{aligned} g(c_t, i_t) &= (50 - c_t)^2 + i_t^2 \\ &= (50 - 0.2a_t - y_t + i_t)^2 + i_t^2 \\ &= 2500 - 10a_t - 50y_t + 50i_t - 10a_t + 0.04a_t^2 + 0.2a_t y_t - 0.2a_t i_t \\ &\qquad - 50y_t + 0.2a_t y_t + y_t^2 - y_t i_t + 50i_t - 0.2a_t i_t - y_t i_t + i_t^2 + i_t^2 \\ &= 2500 - 20a_t - 100y_t + 100i_t + 0.04a_t^2 + 0.4a_t y_t - 0.4a_t i_t + y_t^2 - 2y_t i_t + 2i_t^2. \end{aligned} \tag{22}$$

この pay-off function は既に 2 次関数なので、近似の必要はないことに注意する。従って、

$$\begin{aligned} g(c_t, i_t) &= \begin{bmatrix} 1 & a_t & y_t & y_{t-1} & i_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2500 & -10 & -50 & 0 & 50 \\ -10 & 0.04 & 0.2 & 0 & -0.2 \\ -50 & 0.2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 50 & -0.2 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_t \\ y_t \\ y_{t-1} \\ i_t \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & a_t & y_t & y_{t-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2500 & -10 & -50 & 0 \\ -10 & 0.04 & 0.2 & 0 \\ -50 & 0.2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_t \\ y_t \\ y_{t-1} \end{bmatrix} + i_t(2)i_t + 2\begin{bmatrix} 1 & a_t & y_t & y_{t-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 50 \\ -0.2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} i_t. \end{aligned} \tag{23}$$

よって、

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 2500 & -10 & -50 & 0 \\ -10 & 0.04 & 0.2 & 0 \\ -50 & 0.2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = 2, \quad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} 50 \\ -0.2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{24}$$

とおくと、pay-off function を

$$\mathbf{x}_t'\mathbf{R}\mathbf{x}_t + \mathbf{u}_t'\mathbf{Q}\mathbf{u}_t + 2\mathbf{x}_t'\mathbf{W}\mathbf{u}_t, \tag{25}$$

とできる。

(問題 2-2)
テキスト p.1020 の交差項の消去法（(B.3.3) 式）より、

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_t^* &= \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{W}'\mathbf{x}_t + \mathbf{u}_t \\ &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix}50 & -0.2 & -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 \\ a_t \\ y_t \\ y_{t-1}\end{bmatrix} + i_t \\ &= 25 - 0.1a_t - 0.5y_t + i_t.\end{aligned} \tag{26}$$

よって、

$$\mathbf{u}_t^* = 25 - 0.1a_t - 0.5y_t + i_t. \tag{27}$$

次に、（テキスト p.1020 の (B.3.6) 式より）

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{R}} &= \mathbf{R} - \mathbf{W}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{W}' \\ &= \begin{bmatrix}2500 & -10 & -50 & 0 \\ -10 & 0.04 & 0.2 & 0 \\ -50 & 0.2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix}50 \\ -0.2 \\ -1 \\ 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}50 & -0.2 & -1 & 0\end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix}1250 & -5 & -25 & 0 \\ -5 & 0.02 & 0.1 & 0 \\ -25 & 0.1 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.\end{aligned} \tag{28}$$

よって、

$$\overline{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix}1250 & -5 & -25 & 0 \\ -5 & 0.02 & 0.1 & 0 \\ -25 & 0.1 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}. \tag{29}$$

最後に、（テキスト p.1020 の (B.3.7) 式より）

$$
\begin{aligned}
\overline{\mathbf{A}} &= \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{W}' \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0.7 & -0.2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 50 & -0.2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -25 & 1.1 & 0.5 & 0 \\ 5 & 0 & 0.7 & -0.2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \qquad (30)
\end{aligned}
$$

よって、

$$
\overline{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -25 & 1.1 & 0.5 & 0 \\ 5 & 0 & 0.7 & -0.2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \qquad (31)
$$

(問題 2-3)
前問までの変換により、Problem は以下で定式化される。

$$
\max_{\mathbf{u}_t^*} \quad -\sum_{t=1}^{\infty} (0.9)^t \left\{ \mathbf{x}_t' \overline{\mathbf{R}} \mathbf{x}_t + \mathbf{u}_t^{*\prime} \mathbf{Q} \mathbf{u}_t^* \right\}, \qquad (32)
$$

$$
\text{s.t.} \quad \mathbf{x}_{t+1} = \overline{\mathbf{A}} \mathbf{x}_t + \mathbf{B} \mathbf{u}_t^*. \qquad (33)
$$

value function も 2 次形式 $-\mathbf{x}_t'\mathbf{P}\mathbf{x}_t$ になると guess すると Bellman equation は以下で与えられる。

$$
-\mathbf{x}_t'\mathbf{P}\mathbf{x}_t = \max_{\mathbf{u}_t^*} - \left\{ \mathbf{x}_t' \overline{\mathbf{R}} \mathbf{x}_t + \mathbf{u}_t^{*\prime} \mathbf{Q} \mathbf{u}_t^* + 0.9 \mathbf{x}_{t+1}' \mathbf{P} \mathbf{x}_{t+1} \right\}. \qquad (34)
$$

ただし、無限期間問題における stationarity を用いている。$\mathbf{x}_{t+1}$ に law of motion を代入することで、

$$
-\mathbf{x}_t'\mathbf{P}\mathbf{x}_t = \max_{\mathbf{u}_t^*} - \left\{ \mathbf{x}_t' \overline{\mathbf{R}} \mathbf{x}_t + \mathbf{u}_t^{*\prime} \mathbf{Q} \mathbf{u}_t^* + 0.9 (\overline{\mathbf{A}} \mathbf{x}_t + \mathbf{B} \mathbf{u}_t^*)' \mathbf{P} (\overline{\mathbf{A}} \mathbf{x}_t + \mathbf{B} \mathbf{u}_t^*) \right\}. \qquad (35)
$$

次に、f.o.c. より policy function を求める。B.E. の右辺の $\mathbf{u}_t^*$ についての最大化のための f.o.c. は、

$$
2\mathbf{Q}\mathbf{u}_t^* + 0.9(2\mathbf{B}'\mathbf{P}\overline{\mathbf{A}}\mathbf{x}_t + 2\mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{u}_t^*) = 0, \qquad (36)
$$

$$
\iff \quad (\mathbf{Q} + 0.9\mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{B})\mathbf{u}_t^* = -0.9\mathbf{B}'\mathbf{P}\overline{\mathbf{A}}\mathbf{x}_t. \qquad (37)
$$

したがって、

$$
\mathbf{u}_t^* = -0.9(\mathbf{Q} + 0.9\mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}'\mathbf{P}\overline{\mathbf{A}}\mathbf{x}_t, \qquad (38)
$$

となるので、

$$
\mathbf{F}^* = 0.9(\mathbf{Q} + 0.9\mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}'\mathbf{P}\overline{\mathbf{A}}, \qquad (39)
$$

と置くと、$\mathbf{u}_t^* = -\mathbf{F}^*\mathbf{x}_t$ とできる。

$\mathbf{x}_t$ は (4×1) のベクトルなので、value function $\mathbf{x}_t'\mathbf{P}\mathbf{x}_t$ をつくる行列 $\mathbf{P}$ は (4×4) の行列である。この $\mathbf{P}$ を

$$\begin{bmatrix} P_{11} & \dots & P_{14} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{41} & \dots & P_{44} \end{bmatrix}, \tag{40}$$

とおく。この時、

$$\begin{aligned} \mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{B} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & \dots & P_{14} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{41} & \dots & P_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} P_{21} & P_{22} & P_{23} & P_{24} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= P_{22}, \end{aligned} \tag{41}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}'\mathbf{P}\overline{\mathbf{A}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & \dots & P_{14} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{41} & \dots & P_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -25 & 1.1 & 0.5 & 0 \\ 5 & 0 & 0.7 & -0.2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} P_{21} & P_{22} & P_{23} & P_{24} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -25 & 1.1 & 0.5 & 0 \\ 5 & 0 & 0.7 & -0.2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} P_{21} - 25P_{22} + 5P_{23} \\ 1.1P_{22} \\ 0.5P_{22} + 0.7P_{23} + P_{24} \\ -0.2P_{23} \end{bmatrix}'. \end{aligned} \tag{42}$$

これらと、前問までに求めた $\mathbf{Q}$ を $\mathbf{F}^*$ に代入すると

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^* &= 0.9(2 + 0.9P_{22})^{-1} \begin{bmatrix} P_{21} - 25P_{22} + 5P_{23} \\ 1.1P_{22} \\ 0.5P_{22} + 0.7P_{23} + P_{24} \\ -0.2P_{23} \end{bmatrix}' \\ &= \frac{1}{2 + 0.9P_{22}} \begin{bmatrix} 0.9P_{21} - 22.5P_{22} + 4.5P_{23} \\ 0.99P_{22} \\ 0.45P_{22} + 0.63P_{23} + 0.9P_{24} \\ -0.18P_{23} \end{bmatrix}', \end{aligned} \tag{43}$$

である。

(問題 2-4)
value function を $\mathbf{x}_t'\mathbf{P}_j\mathbf{x}_t$ と guess したとする。これを Bellman equation の右辺に代入し、policy function を求め、それを Bellman equation に代入したとき、新たに得られる value function の guess $\mathbf{x}_t'\mathbf{P}_{j+1}\mathbf{x}_t$ の行列 $\mathbf{P}_{j+1}$ は以下を満たす（Riccati equation）。

$$\mathbf{P}_{j+1} = \overline{\mathbf{R}} + 0.9\overline{\mathbf{A}}'\mathbf{P}_j\overline{\mathbf{A}} - 0.9^2\overline{\mathbf{A}}'\mathbf{P}_j\mathbf{B}(\mathbf{Q} + 0.9\mathbf{B}'\mathbf{P}_j\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}'\mathbf{P}_j\overline{\mathbf{A}}. \tag{44}$$

いま、$\mathbf{P}_0 = \mathbf{0}$ という guess を置いたとする。このとき、新たな guess $\mathbf{P}_1$ は、(44) より

$$\mathbf{P}_1 = \overline{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} 1250 & -5 & -25 & 0 \\ -5 & 0.02 & 0.1 & 0 \\ -25 & 0.1 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{45}$$

次に、この guess $\mathbf{P}_1$ を用いると、(44) より新たな guess $\mathbf{P}_2$ は、

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_2 &= \overline{\mathbf{R}} + 0.9\overline{\mathbf{A}}'\mathbf{P}_1\overline{\mathbf{A}} - 0.9^2\overline{\mathbf{A}}'\mathbf{P}_1\mathbf{B}(\mathbf{Q} + 0.9\mathbf{B}'\mathbf{P}_1\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}'\mathbf{P}_1\overline{\mathbf{A}} \\ &= \overline{\mathbf{R}} + 0.9\overline{\mathbf{A}}'\overline{\mathbf{R}}\,\overline{\mathbf{A}} - 0.9^2\overline{\mathbf{A}}'\overline{\mathbf{R}}\mathbf{B}(\mathbf{Q} + 0.9\mathbf{B}'\overline{\mathbf{R}}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}'\overline{\mathbf{R}}\,\overline{\mathbf{A}} \\ &= \begin{bmatrix} 2364.9653 & -9.9058 & -42.8394 & 4.4599 \\ -9.9058 & 0.0416 & 0.1758 & -0.0196 \\ -42.8394 & 0.1758 & 0.7854 & -0.0714 \\ 4.4599 & -0.0196 & -0.0714 & 0.0178 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{46}$$

同様に、次の guess $\mathbf{P}_3$ は (44) より、

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_3 &= \overline{\mathbf{R}} + 0.9\overline{\mathbf{A}}'\mathbf{P}_2\overline{\mathbf{A}} - 0.9^2\overline{\mathbf{A}}'\mathbf{P}_2\mathbf{B}(\mathbf{Q} + 0.9\mathbf{B}'\mathbf{P}_2\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}'\mathbf{P}_2\overline{\mathbf{A}} \\ &= \begin{bmatrix} 3399.4013 & -14.7697 & -52.2115 & 7.6648 \\ -14.7697 & 0.0645 & 0.2226 & -0.0347 \\ -52.2115 & 0.2226 & 0.8703 & -0.1004 \\ 7.6648 & -0.0347 & -0.1004 & 0.0278 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{47}$$

(問題 2-5)
問題は以下のように書き換えられる。

$$\max_{\{c_t, i_t\}} \quad -\sum_{t=1}^{\infty}(0.9)^t\left\{(50 - c_t)^2 + i_t^2\right\}, \tag{48}$$

$$\text{s.t.} \quad c_t + i_t = 0.2a_t + y_t, \tag{49}$$

$$a_{t+1} = a_t + i_t, \tag{50}$$

$$y_{t+1} = 5 + 0.7y_t - 0.2y_{t-1} + 0.5\epsilon_{t+1}, \tag{51}$$

$$\epsilon_t \sim \mathcal{N}(0, 1), \quad \text{i.i.d.} \tag{52}$$

この問題を LQ 化する。まず、pay-off function は以前と変わらないので、

$$\left\{(50-c_t)^2+i_t^2\right\}=\mathbf{x}_t'\mathbf{R}\mathbf{x}_t+\mathbf{u}_t'\mathbf{Q}\mathbf{u}_t+2\mathbf{x}_t'\mathbf{W}\mathbf{u}_t, \tag{53}$$

となる。ただし、state vector $\mathbf{x}_t$, control vector $\mathbf{u}_t$ は前問までの定義と、行列 $\mathbf{R}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{W}$ は前問までに求めたものと同じである。

続いて、state の law of motion は、

$$\begin{bmatrix}1\\a_{t+1}\\y_{t+1}\\y_t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\5&0&0.7&-0.2\\0&0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\a_t\\y_t\\y_{t-1}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}i_t+\begin{bmatrix}0\\0\\0.5\\0\end{bmatrix}\epsilon_{t+1}, \tag{54}$$

と書き表せるので、

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix}0\\0\\0.5\\0\end{bmatrix}, \tag{55}$$

と定義することで、$\mathbf{x}_{t+1}=\mathbf{A}\mathbf{x}_t+\mathbf{B}\mathbf{u}_t+\mathbf{C}\epsilon_{t+1}$ とできる。ただし、行列 $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ は前問までに求めたものと同じである。

次に、pay-off function の交差項を消去するために、新たな control vector $\mathbf{u_t}^*$ を

$$\mathbf{u}_t^*=\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{W}'\mathbf{x}_t+\mathbf{u}_t \quad \left(\iff \quad \mathbf{u}_t=\mathbf{u}_t^*-\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{W}'\mathbf{x}_t\right), \tag{56}$$

と定義する。このとき pay-off function は

$$\mathbf{x}_t'\mathbf{R}\mathbf{x}_t+\mathbf{u}_t'\mathbf{Q}\mathbf{u}_t+2\mathbf{x}_t'\mathbf{W}\mathbf{u}_t=\mathbf{x}_t'\overline{\mathbf{R}}\mathbf{x}_t+\mathbf{u}_t^{*\prime}\mathbf{Q}\mathbf{u}_t^*, \tag{57}$$

とできる。ただし、行列 $\overline{\mathbf{R}}$ は前問までに求めたものと同様である。また、このとき state の law of motion は、

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{t+1}&=\mathbf{A}\mathbf{x}_t+\mathbf{B}\mathbf{u}_t+\mathbf{C}\epsilon_{t+1}\\&=\mathbf{A}\mathbf{x}_t+\mathbf{B}(\mathbf{u}_t^*-\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{W}'\mathbf{x}_t)+\mathbf{C}\epsilon_{t+1}\\&=(\mathbf{A}-\mathbf{B}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{W}')\mathbf{x}_t+\mathbf{B}\mathbf{u}_t^*+\mathbf{C}\epsilon_{t+1}\\&=\overline{\mathbf{A}}\mathbf{x}_t+\mathbf{B}\mathbf{u}_t^*+\mathbf{C}\epsilon_{t+1},\end{aligned} \tag{58}$$

となる。ただし $\overline{\mathbf{A}}$ は前問までで導出したものである。

以上より、元の問題は

$$\max_{\mathbf{u}_t^*} \quad -\sum_{t=1}^{\infty}(0.9)^t\left\{\mathbf{x}_t'\overline{\mathbf{R}}\mathbf{x}_t+\mathbf{u}_t^{*\prime}\mathbf{Q}\mathbf{u}_t^*\right\}, \tag{59}$$

$$\text{s.t.} \quad \mathbf{x}_{t+1}=\overline{\mathbf{A}}\mathbf{x}_t+\mathbf{B}\mathbf{u}_t^*+\mathbf{C}\epsilon_{t+1}, \tag{60}$$

と Linear Quadratic form で表せる。

不確実性の存在に基づく value の減少を考慮して、value function を $-\mathbf{x}_t'\widetilde{\mathbf{P}}\mathbf{x}_t - d$, ($d$ は未知のスカラー定数) と guess する。このとき、Bellman equation は

$$
\begin{aligned}
&-\mathbf{x}_t'\widetilde{\mathbf{P}}\mathbf{x}_t - d = \\
&\max_{\mathbf{u}_t^*}\left\{-\mathbf{x}_t'\overline{\mathbf{R}}\mathbf{x}_t - \mathbf{u}_t^{*\prime}\mathbf{Q}\mathbf{u}_t^* + 0.9E\left[-(\overline{\mathbf{A}}\mathbf{x}_t + \mathbf{B}\mathbf{u}_t^* + \mathbf{C}\epsilon_{t+1})'\widetilde{\mathbf{P}}(\overline{\mathbf{A}}\mathbf{x}_t + \mathbf{B}\mathbf{u}_t^* + \mathbf{C}\epsilon_{t+1}) - d\right]\right\}, \qquad (61)
\end{aligned}
$$

と定式化される。ここで、

$$
\begin{aligned}
&E\left[-(\overline{\mathbf{A}}\mathbf{x}_t + \mathbf{B}\mathbf{u}_t^* + \mathbf{C}\epsilon_{t+1})'\widetilde{\mathbf{P}}(\overline{\mathbf{A}}\mathbf{x}_t + \mathbf{B}\mathbf{u}_t^* + \mathbf{C}\epsilon_{t+1}) - d\right] \\
=&E\Big[-(\overline{\mathbf{A}}\mathbf{x}_t + \mathbf{B}\mathbf{u}_t^*)'\widetilde{\mathbf{P}}(\overline{\mathbf{A}}\mathbf{x}_t + \mathbf{B}\mathbf{u}_t^*) - (\overline{\mathbf{A}}\mathbf{x}_t + \mathbf{B}\mathbf{u}_t^*)'\widetilde{\mathbf{P}}\mathbf{C}\epsilon_{t+1} - \epsilon_{t+1}'\mathbf{C}'\widetilde{\mathbf{P}}(\overline{\mathbf{A}}\mathbf{x}_t + \mathbf{B}\mathbf{u}_t^*) \\
&\qquad - \epsilon_{t+1}'\mathbf{C}'\widetilde{\mathbf{P}}\mathbf{C}\epsilon_{t+1}\Big] - d \\
=&-(\overline{\mathbf{A}}\mathbf{x}_t + \mathbf{B}\mathbf{u}_t^*)'\widetilde{\mathbf{P}}(\overline{\mathbf{A}}\mathbf{x}_t + \mathbf{B}\mathbf{u}_t^*) - E\left[\epsilon_{t+1}'\mathbf{C}'\widetilde{\mathbf{P}}\mathbf{C}\epsilon_{t+1}\right] - d, \qquad (62)
\end{aligned}
$$

ただし、最後の等式は $E[\epsilon_{t+1}] = 0$ による。ここで、

$$
\begin{aligned}
&E\left[\epsilon_{t+1}'\mathbf{C}'\widetilde{\mathbf{P}}\mathbf{C}\epsilon_{t+1}\right] \\
=&E\left[\mathrm{tr}(\epsilon_{t+1}'\mathbf{C}'\widetilde{\mathbf{P}}\mathbf{C}\epsilon_{t+1})\right] \\
=&E\left[\mathrm{tr}(\mathbf{C}'\widetilde{\mathbf{P}}\mathbf{C}\epsilon_{t+1}\epsilon_{t+1}')\right] \\
=&\mathrm{tr}(\mathbf{C}'\widetilde{\mathbf{P}}\mathbf{C})E\left[\epsilon_{t+1}\epsilon_{t+1}'\right] \\
=&\mathrm{tr}(\mathbf{C}'\widetilde{\mathbf{P}}\mathbf{C}) \\
=&\mathrm{tr}(\widetilde{\mathbf{P}}\mathbf{C}\mathbf{C}'). \qquad (63)
\end{aligned}
$$

これを用いると、Bellman equation は以下のように書き直せる。

$$
\begin{aligned}
&-\mathbf{x}_t'\widetilde{\mathbf{P}}\mathbf{x}_t - d = \\
&\max_{\mathbf{u}_t^*}\Big\{-\mathbf{x}_t'\overline{\mathbf{R}}\mathbf{x}_t - \mathbf{u}_t^{*\prime}\mathbf{Q}\mathbf{u}_t^* - 0.9(\overline{\mathbf{A}}\mathbf{x}_t + \mathbf{B}\mathbf{u}_t^*)'\widetilde{\mathbf{P}}(\overline{\mathbf{A}}\mathbf{x}_t + \mathbf{B}\mathbf{u}_t^*) - 0.9\mathrm{tr}(\widetilde{\mathbf{P}}\mathbf{C}\mathbf{C}') - 0.9d\Big\}, \qquad (64)
\end{aligned}
$$

Bellman equation の右辺の $\mathbf{u}_t^*$ についての最大化のための f.o.c. は、

$$
2\mathbf{Q}\mathbf{u}_t^* + 0.9(2\mathbf{B}'\widetilde{\mathbf{P}}\overline{\mathbf{A}}\mathbf{x}_t + 2\mathbf{B}'\widetilde{\mathbf{P}}\mathbf{B}\mathbf{u}_t^*) = 0, \qquad (65)
$$

と、問題 (2-3) で求めたものと同様となり、したがって、policy function は

$$
\begin{aligned}
\mathbf{u}_t^* &= -\widetilde{\mathbf{F}}^*\mathbf{x}_t, \qquad (66) \\
\text{where} \quad \widetilde{\mathbf{F}}^* &= 0.9(\mathbf{Q} + 0.9\mathbf{B}'\widetilde{\mathbf{P}}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}'\widetilde{\mathbf{P}}\overline{\mathbf{A}}\mathbf{x}_t, \qquad (67)
\end{aligned}
$$

とできる。これを Bellman equation の右辺に代入すると、

$$
\begin{aligned}
&-\mathbf{x}_t'\widetilde{\mathbf{P}}\mathbf{x}_t - d = \\
&-\mathbf{x}_t'\left[\overline{\mathbf{R}} + \widetilde{\mathbf{F}^*}'\mathbf{Q}\widetilde{\mathbf{F}}^* + (\overline{\mathbf{A}}\mathbf{x}_t - \mathbf{B}\widetilde{\mathbf{F}}^*)'\widetilde{\mathbf{P}}(\overline{\mathbf{A}}\mathbf{x}_t - \mathbf{B}\widetilde{\mathbf{F}}^*)\right]\mathbf{x}_t - 0.9\mathrm{tr}(\widetilde{\mathbf{P}}\mathbf{C}\mathbf{C}') - 0.9d. \qquad (68)
\end{aligned}
$$

このとき、$\widetilde{\mathbf{P}}$ を求めるための Ricatti equation も、不確実性がなかった時のものと同様になり、従って $\widetilde{\mathbf{P}}$ は前問までの $\mathbf{P}$ と一致することになる[3]。

以上より、value function は、$\mathbf{x}_t'\mathbf{P}\mathbf{x}_t - d$ となり、不確実性に基づく value の減少は d となる。この d を求めるための条件は、(68) より、

$$-d = -0.9\mathrm{tr}(\mathbf{PCC}') - 0.9d, \tag{69}$$

で与えられる。ここで、$\mathbf{P}$ に近似的に前問で求めた $\mathbf{P}_3$ を用いると、

$$\begin{aligned} d &= 9\mathrm{tr}(\mathbf{P}_3\mathbf{CC}') \\ &= 1.9583. \end{aligned} \tag{70}$$

(問題 2-6)
消費量は、

$$\begin{aligned} c_t &= 0.2a_t + y_t - i_t \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0.2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_t \\ y_t \\ y_{t+1} \end{bmatrix} - i_t \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0.2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_t - \mathbf{u}_t. \end{aligned} \tag{71}$$

また、変換された control vector $\mathbf{u}_t^*$ の最適値、$\mathbf{u}_t^* = -\mathbf{F}^*\mathbf{x}_t$ について、$\mathbf{u}_t = \mathbf{u}_t^* - \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{W}'\mathbf{x}_t$ であることから、$\mathbf{u}_t$ の最適値は

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_t &= -\mathbf{F}^*\mathbf{x}_t - \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{W}'\mathbf{x}_t \\ &= -(\mathbf{F}^* + \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{W}')\mathbf{x}_t, \end{aligned} \tag{72}$$

これを (71) に代入することで、最適消費量を

$$c_t = \mathbf{D}\mathbf{x}_t, \tag{73}$$

と、state vector に線形な形で表せる。ただし行列 $\mathbf{D}$ は

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0.2 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \mathbf{F}^* + \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{W}' \tag{74}$$

で与えられる。ここで、$\mathbf{P}$ を、問題 (2-4) で求めた $\mathbf{P}_3$ で近似すると、問題 (2-3) より

$$\mathbf{F}^* = \begin{bmatrix} -6.6770 & 0.0310 & 0.0671 & -0.0195 \end{bmatrix}, \tag{75}$$

[3] このことから、policy function の $\widetilde{\mathbf{F}}^*$ も不確実性がなかったときの policy function の $\mathbf{F}^*$ と一致することになる。

であり、行列 $\mathbf{D}$ は

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 18.3230 & 0.1310 & 0.5671 & -0.0195 \end{bmatrix}, \tag{76}$$

と求められる。

一方、最適な policy にしたがっているときの state の law of motion は、

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{t+1} &= \overline{\mathbf{A}}\mathbf{x}_t + \mathbf{B}\mathbf{u}_t^* + \mathbf{C}\epsilon_{t+1} \\ &= (\overline{\mathbf{A}} - \mathbf{B}\mathbf{F}^*)\mathbf{x}_t + \mathbf{C}\epsilon_{t+1}, \end{aligned} \tag{77}$$

であり、$\mathbf{x}_t$ は Markov Process に従っている。先と同様、$\mathbf{P}$ を、問題 (2-4) で求めた $\mathbf{P}_3$ で近似すると、

$$\overline{\mathbf{A}} - \mathbf{B}\mathbf{F}^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -18.3230 & 1.0690 & 0.4329 & 0.0195 \\ 5 & 0 & 0.7 & -0.2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \tag{78}$$

と計算できる。

これと (73) を合わせると

$$\mathbf{x}_{t+1} = (\overline{\mathbf{A}} - \mathbf{B}\mathbf{F}^*)\mathbf{x}_t + \mathbf{C}\epsilon_{t+1}, \tag{79}$$

$$c_t = \mathbf{D}\mathbf{x}_t, \tag{80}$$

もしくは、

$$\mathbf{x}_{t+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -18.3230 & 1.0690 & 0.4329 & 0.0195 \\ 5 & 0 & 0.7 & -0.2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_t + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.5 \\ 0 \end{bmatrix} \epsilon_{t+1}, \tag{81}$$

$$c_t = \begin{bmatrix} 18.3230 & 0.1310 & 0.5671 & -0.0195 \end{bmatrix} \mathbf{x}_t, \tag{82}$$

と、最適消費量を linear state-space system の形で表現でき、最適消費量も Markov Process に従うことが分かる。

補論: Equilibrium with Complete Markets (8.6. Examples)

TA:荒渡良[†]

平成 17 年 11 月 28 日

1 Notations

以下の問題を通じて、各 notation は次のように定義されると約束する。

- $i \in \{1, 2, \cdots, I\}$: 個人の index。
- β : 効用の割引率。
- s_t : t 期の state。
- s^t : t 期までの state の history。具体的には、$s^t = (s_0, s_1, \cdots, s_t)$ を表す。
- $\pi_t(s_t)$: t 期において state s_t が発生する、非条件付確率。
- $\pi_t(s^t)$: t 期において、ある特定の state の history s^t が発生する、非条件付確率。
- $q_t^0(s^t)$: Arrow-Debreu security の price system。0 は取引時点が 0 期であることを、t は財の受け渡し時点が t 期であることを表す。また、s^t は「もしも t 期に history s^t が発生したら、Arrow-Debreu security の所有者に財を一単位渡す」ことを意味している。
- $c_t^i(s^t)$: t 期において history s^t が発生した時の、第 i 個人の消費量。各個人は起こり得る全ての history について消費計画を立てることになる。
- c^i : 第 i 個人の消費計画の sequence。具体的には $c^i = \{c_t^i(s^t)\}_{t=0}^{\infty}$ を表す。
- $y_t^i(s^t)$: t 期において history s^t が発生した時に、第 i 個人が得ることのできる endowment。不確実な state の history s^t に依存しているために、endowment も不確実である。これが、モデル全体の不確実性を生む。

[†]e-mail: ege001ar@mail2.econ.osaka-u.ac.jp

8.6.1. Example 1: risk sharing

効用関数を

$$u(c) = (1-\gamma)^{-1} c^{1-\gamma},\ \gamma > 0, \tag{1}$$

と、CRRA 型に特定する。この時、第 i 個人の問題は次のように与えられる。

$$\max_{c^i} \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t} \beta^t \left\{ (1-\gamma)^{-1} c_t^i(s^t)^{1-\gamma} \right\} \pi_t(s^t), \tag{2}$$

$$\text{s.t.} \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t} q_t^0(s^t) c_t^i(s^t) \leq \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t} q_t^0(s^t) y_t^i(s^t). \tag{3}$$

個人 i の Lagrangian を L_i、Lagrange multiplier を μ_i とおくと

$$L_i = \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t} \beta^t \left\{ (1-\gamma)^{-1} c_t^i(s^t)^{1-\gamma} \right\} \pi_t(s^t) + \mu_i \left[\sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t} \left\{ q_t^0(s^t) y_t^i(s^t) - q_t^0(s^t) c_t^i(s^t) \right\} \right]. \tag{4}$$

f.o.c. は

$$\frac{\partial L_i}{\partial c_t^i(s^t)} = 0,\ \Leftrightarrow\ \beta^t c_t^i(s^t)^{-\gamma} \pi_t(s^t) = \mu_i q_t^0(s^t),\ \forall t, s^t. \tag{5}$$

である[1]。上記の f.o.c. は特定の個人 i のものであるが、他の全ての個人についても上記の f.o.c. は成立する筈である。従って、任意の第 j 個人について

$$\beta^t c_t^j(s^t)^{-\gamma} \pi_t(s^t) = \mu_j q_t^0(s^t), \quad \forall t, s^t. \tag{6}$$

が成立する。ここで、(5) と (6) の片々の比をとると、次式が成立する。

$$\left[\frac{c_t^i(s^t)}{c_t^j(s^t)} \right]^{-\gamma} = \frac{\mu_i}{\mu_j}, \quad \forall t, s^t\ \Leftrightarrow\ c_t^i(s^t) = c_t^j(s^t) \left(\frac{\mu_i}{\mu_j} \right)^{-\frac{1}{\gamma}}. \tag{7}$$

従って、第 i 個人の消費量は、第 j 個人の消費量の定数倍である。

次に、全ての個人の消費を足し合わせて、経済全体の中での個人の消費の性質を調べる。(7) を全ての個人 $i = 1, 2, \cdots, I$ について足し合わせると

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{I} c_t^i(s^t) &= \sum_{i=1}^{I} c_t^j(s^t) \left(\frac{\mu_i}{\mu_j} \right)^{-\frac{1}{\gamma}} \\ &= c_t^j(s^t) \sum_{i=1}^{I} \left(\frac{\mu_i}{\mu_j} \right)^{-\frac{1}{\gamma}}. \end{aligned} \tag{8}$$

[1] これは「もしも t 期において特定の history s^t が発生したならば、どのような消費を行うか」という最適化問題を解くための f.o.c. である。従って、全ての t と、起こり得る全ての history s^t について、この f.o.c. は成立しなければならない。

但し、上式の j はある特定の個人を表し、i は summation を取るための index である。ここで、資源制約より t 期の総消費量は t 期の総 endowment を超えることはできないので、

$$\sum_{i=1}^{I} c_t^i(s^t) = \sum_{i=1}^{I} y_t^i(s^t), \tag{9}$$

が成立している[2]。これを (8) に代入すると、

$$c_t^j(s^t) = \left\{ \sum_{i=1}^{I} \left(\frac{\mu_i}{\mu_j} \right)^{-\frac{1}{\gamma}} \right\}^{-1} Y_t(s^t). \tag{10}$$

但し、$Y_t(s^t) = \sum_{i=1}^{I} y_t^i(s^t)$ である。

(10) は次のようなことを意味する。まず、任意の第 j 個人について、消費量は aggregate endowment のみに依存し、個人の endowment からは独立となっている。これは、Arrow-Debreu security によって個人的なリスクが完全に回避されており、complete market が成立していることを意味する。また、(10) より、個人間の消費の比率は history に依存せず常に一定である。これは CRRA 型効用関数を仮定していることに依存している[3]。

最後に、(6) 式より price system は

$$\begin{aligned} q_t^0(s^t) &= \mu_j^{-1} \beta^t c_t^j(s^t)^{-\gamma} \pi_t(s^t) && (11) \\ &= \mu_j^{-1} \beta^t \left[\left\{ \sum_{i=1}^{I} \left(\frac{\mu_i}{\mu_j} \right)^{-\frac{1}{\gamma}} \right\}^{-1} Y_t(s^t) \right]^{-\gamma} \pi_t(s^t) && (12) \\ &= \beta^t \left\{ \sum_{i=1}^{I} \mu_i \right\}^{-1} Y_t(s^t)^{-\gamma} \pi_t(s^t). && (13) \end{aligned}$$

以上より、Arrow-Debreu Equilibrium (ADE) は

$$c_t^j(s^t) = \left\{ \sum_{i=1}^{I} \left(\frac{\mu_i}{\mu_j} \right)^{-\frac{1}{\gamma}} \right\}^{-1} Y_t(s^t), \quad \forall t, s^t \tag{14}$$

$$q_t^0(s^t) = \beta^t \left\{ \sum_{i=1}^{I} \mu_i \right\}^{-1} Y_t(s^t)^{-\gamma} \pi_t(s^t), \quad \forall t, s^t \tag{15}$$

によって特徴付けられる。

[2] これは、財を保存できないという仮定による。また、消費関数は増加関数なので、各個人が最適な行動を取っている均衡において、資源制約が不等号で成立することはない。

[3] 具体的には、CRRA 型効用関数の下では MRS= $\left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)^{-\gamma}$ と、限界代替率が消費量の比にのみ依存する (homothetic)、という性質による。

8.6.2. Example 2: no aggregate uncertainty

二人の個人 $i = 1, 2$ からなる経済を考える。次のように state の process 及び endowment が決定されるとする。

$$\begin{aligned} & s_t \in [0,1], && (16) \\ & y_t^1(s^t) = s_t, \quad y_t^2(s^t) = 1 - s_t, && (17) \\ & Y_t(s^t) = y_t^1(s^t) + y_t^2(s^t) = s_t + (1 - s_t) = 1. && (18) \end{aligned}$$

効用関数は $u\left(c_t^i(s^t)\right),\ i = 1, 2$ と表す。この時、任意の第 i 個人の問題は以下の様に表される。

$$\begin{aligned} & \max_{c^i} \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t} \beta^t u\left(c_t^i(s^t)\right) \pi_t(s^t), && (19) \\ & \text{s.t.} \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t} q_t^0(s^t) c_t^i(s^t) \leq \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t} q_t^0(s^t) y_t^i(s^t). && (20) \end{aligned}$$

第 i 個人の Lagrangian を L_i、Lagrange multiplier を μ_i とおくと

$$L_i = \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t} \beta^t u\left(c_t^i(s^t)\right) \pi_t(s^t) + \mu_i \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t} \left(q_t^0(s^t) y_t^i(s^t) - q_t^0(s^t) c_t^i(s^t) \right) \right\}. \tag{21}$$

f.o.c. は

$$\frac{\partial L_i}{\partial c_t^i(s^t)} = 0 \ \Leftrightarrow \ \beta^t u'\left(c_t^i(s^t)\right) \pi_t(s^t) = \mu_i q_t^0(s^t), \quad \forall t, s^t. \tag{22}$$

と求まる。ここで、任意の $j = 1, 2$ についても上と同じ式が成立するため、第 i 個人の f.o.c. と第 j 個人の f.o.c. の比をとると

$$\frac{u'\left(c_t^i(s^t)\right)}{u'\left(c_t^j(s^t)\right)} = \frac{\mu_i}{\mu_j} \ \Leftrightarrow \ u'\left(c_t^i(s^t)\right) = u'\left(c_t^j(s^t)\right) \frac{\mu_i}{\mu_j}, \quad \forall t, s^t. \tag{23}$$

ここで、効用関数 $u(\cdot)$ は strictly concave なので、その一次導関数 $u'(\cdot)$ は必ず逆関数 $u'^{-1}(\cdot)$ を持つ。よって (23) は次の様に書き換えられる。

$$c_t^i(s^t) = u'^{-1}\left(u'\left(c_t^j(s^t)\right) \frac{\mu_i}{\mu_j} \right), \quad \forall t, s^t. \tag{24}$$

次に、全ての個人の消費を足し合わせて、経済全体の中での個人の消費の性質を調べる。上式を $i = 1, 2$ について足し合わせると

$$c_t^1(s^t) + c_t^2(s^t) = u'^{-1}\left(u'\left(c_t^j(s^t)\right) \frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_j} \right), \quad \forall t, s^t. \tag{25}$$

但し、ここでは任意の j を fixed にして計算している。資源制約より

$$\begin{aligned} c_t^1(s^t)+c_t^2(s^t) &= y_t^1(s^t)+y_t^2(s^t), \\ &= s_t+(1-s_t) \\ &= 1, \quad \forall t, s^t \end{aligned} \tag{26}$$

が成立するので、任意の第 j 個人について

$$1 = u'^{-1}\left(u'\left(c_t^j(s^t)\right)\frac{\mu_1+\mu_2}{\mu_j}\right), \quad \forall t, s^t \tag{27}$$

が成立する。この時、μ_1、μ_2 は constant なので、(27) より、第 j 個人の消費は任意の t、s^t について常に一定であることが分かる。従って

$$c_t^i(s^t) = \bar{c}^i, \quad \forall t, s^t, \ i = 1, 2. \tag{28}$$

が成立する。但し、$\bar{c}^i$ は constant である。

次に、時間、state を通じて一定の消費量を具体的に求める。(22) を price system について解くと

$$q_t^0(s^t) = \beta^t \pi_t(s^t)\frac{u'(\bar{c}^i)}{\mu_i}, \quad \forall t, s^t. \tag{29}$$

但し、消費量は一定の $\bar{c}^i$ で置き換えている。これを予算制約式に代入すると

$$\begin{aligned} &\sum_{t=0}^{\infty}\sum_{s^t}\beta^t\pi_t(s^t)\frac{u'(\bar{c}^i)}{\mu_i}\bar{c}^i = \sum_{t=0}^{\infty}\sum_{s^t}\beta^t\pi_t(s^t)\frac{u'(\bar{c}^i)}{\mu_i}y_t^i(s^t) \\ \Leftrightarrow\ & \bar{c}^i\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t\sum_{s^t}\pi_t(s^t) = \sum_{t=0}^{\infty}\beta^t\sum_{s^t}\pi_t(s^t)y_t^i(s^t). \end{aligned} \tag{30}$$

ここで、$\sum_{s^t}\pi_t(s^t)=1$ (起こり得る全ての hittory について確率を足すと 1) なので、

$$\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t\sum_{s^t}\pi_t(s^t) = \sum_{t=0}^{\infty}\beta^t\times 1 = \frac{1}{1-\beta}. \tag{31}$$

従って、

$$\bar{c}^i = (1-\beta)\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t\sum_{s^t}\pi_t(s^t)y_t^i(s^t), \tag{32}$$

と消費が求まる[4]。消費量は state に関わらず常に一定になっていることに注意が必要である。これは経済全体の endowment は $y_t^1(s^t)+y_t^2(s^t)=1$ と常に一定であり、経済全体でみれば不確実性が存在

[4] パラメータ β の値と state s_t の stochastic process が与えられれば、消費が実数で算出できる。

しない (no aggregate uncertainty) 事と、Arrow-Debreu security の取引によって complete market が成立し、個々人のリスクを完全に share できていることに起因する。

求められた均衡における個人の消費が資源制約を満たしていることを確認する。

$$
\begin{aligned}
\bar{c}^1 + \bar{c}^2 &= (1-\beta)\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t \sum_{s^t}\pi_t(s^t)\left(\underbrace{y_t^1(s^t) + y_t^2(s^t)}_{=1}\right) \\
&= (1-\beta)\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t \underbrace{\sum_{s^t}\pi_t(s^t)}_{=1} \\
&= (1-\beta)\times\frac{1}{1-\beta} \\
&= 1. \qquad (33)
\end{aligned}
$$

従って、資源制約は満たされていることが確認された。

最後に、price system について考える。$q_0^0(s^0) = 1$ に基準化すると[5]

$$
q_0^0(s^0) = \beta^0\pi_0(s^0)\frac{u'(\bar{c}^i)}{\mu_i} = 1 \ \Leftrightarrow \ \frac{u'(\bar{c}^i)}{\mu_i} = 1. \qquad (34)
$$

従って、

$$
q_t^0(s^t) = \beta^t\pi_t(s^t). \qquad (35)
$$

と求まる。

以上より、Arrow-Debreu Equilibrium (ADE) は

$$
c_t^i(s^t) = \bar{c}^i = (1-\beta)\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t\sum_{s^t}\pi_t(s^t)y_t^i(s^t), \quad \forall t, s^t,\ i = 1, 2 \qquad (36)
$$

$$
q_t^0(s^t) = \beta^t\pi_t(s^t), \quad \forall t, s^t \qquad (37)
$$

によって特徴付けられる。

[5] これは 0 期の財一単位を受け渡しする Arrow-Debreu sequrity の、0 期における価格が 1 であることを表す。この経済には財は 1 つしかないので、この基準化が一般性を失わせることはない。

8.6.3. Example 3: periodic endowment processes

二人の個人 $i=1,2$ からなる経済を考える。次のように state の process 及び endowment が決定されるとする。

$$s_t = \begin{cases} 0, & \text{if: } t \text{ is odd.} \\ 1, & \text{if: } t \text{ is even.} \end{cases} \tag{38}$$

$$y_t^1(s^t) = s_t, \quad y_t^2(s^t) = 1 - s_t. \tag{39}$$

$$y_t^1(s^t) + y_t^2(s^t) = s_t + (1 - s_t) = 1. \tag{40}$$

$$y^1 = (y_0^1(s^0), y_1^1(s^1), y_2^1(s^2), \cdots) = (s_0, s_1, s_2, \cdots) = (1, 0, 1, \cdots). \tag{41}$$

$$y^2 = (y_0^2(s^0), y_1^2(s^1), y_2^2(s^2), \cdots) = (1 - s_0, 1 - s_1, 1 - s_2, \cdots) = (0, 1, 0, \cdots). \tag{42}$$

Example 2 と同様に経済全体の endowment は常に一定であり、かつ state の process が deterministic (次にどの state がくるか予想可能) であることに注意が必要である。

第 i 個人の問題は次のように記述される。

$$\max_{c^i} \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t} \beta^t u\left(c_t^i(s^t)\right) \pi_t(s^t), \tag{43}$$

$$\text{s.t.} \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t} q_t^0(s^t) c_t^i(s^t) \leq \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t} q_t^0(s^t) y_t^i(s^t). \tag{44}$$

第 i 個人の Lagrangian を L_i、Lagrange multiplier を μ_i とおくと

$$L_i = \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t} \beta^t u\left(c_t^i(s^t)\right) \pi_t(s^t) + \mu_i \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t} \left(q_t^0(s^t) y_t^i(s^t) - q_t^0(s^t) c_t^i(s^t) \right) \right\}. \tag{45}$$

f.o.c. は

$$\frac{\partial L_i}{\partial c_t^i(s^t)} = 0 \ \Leftrightarrow \ \beta^t u'\left(c_t^i(s^t)\right) \pi_t(s^t) = \mu_i q_t^0(s^t), \quad \forall t, s^t. \tag{46}$$

と求まる。ここで、任意の $j=1,2$ についても上と同じ式が成立するため、第 i 個人の f.o.c. と第 j 個人の f.o.c. の比をとると

$$\frac{u'\left(c_t^i(s^t)\right)}{u'\left(c_t^j(s^t)\right)} = \frac{\mu_i}{\mu_j} \ \Leftrightarrow \ u'\left(c_t^i(s^t)\right) = u'\left(c_t^j(s^t)\right) \frac{\mu_i}{\mu_j}, \quad \forall t, s^t. \tag{47}$$

ここで、効用関数 $u(\cdot)$ は strictly concave なので、その一次導関数 $u'(\cdot)$ は必ず逆関数 $u'^{-1}(\cdot)$ を持つ。よって (47) は次の様に書き換えられる。

$$c_t^i(s^t) = u'^{-1}\left(u'\left(c_t^j(s^t)\right) \frac{\mu_i}{\mu_j} \right), \quad \forall t, s^t. \tag{48}$$

次に、全ての個人の消費を足し合わせて、経済全体の中での個人の消費の性質を調べる。上式を $i = 1, 2$ について足し合わせると

$$c_t^1(s^t) + c_t^2(s^t) = u'^{-1}\left(u'\left(c_t^j(s^t)\right)\frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_j}\right), \quad \forall t, s^t. \tag{49}$$

但し、ここでは任意の j を fixed にして計算している。資源制約より

$$\begin{aligned} c_t^1(s^t) + c_t^2(s^t) &= y_t^1(s^t) + y_t^2(s^t), \\ &= s_t + (1 - s_t) \\ &= 1, \quad \forall t, s^t \end{aligned} \tag{50}$$

が成立するので、任意の第 j 個人について

$$1 = u'^{-1}\left(u'\left(c_t^j(s^t)\right)\frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_j}\right), \quad \forall t, s^t \tag{51}$$

が成立する。この時、μ_1、μ_2 は constant なので、(51) より、第 j 個人の消費は任意の t、s^t について常に一定であることが分かる。従って

$$c_t^i(s^t) = \bar{c}^i, \quad \forall t, s^t, \ i = 1, 2. \tag{52}$$

が成立する。但し、$\bar{c}^i$ は constant である。

次に、時間、state を通じて一定の消費量を具体的に求める。(22) を price system について解くと

$$q_t^0(s^t) = \beta^t \pi_t(s^t)\frac{u'(\bar{c}^i)}{\mu_i}, \quad \forall t, s^t. \tag{53}$$

但し、消費量は一定の $\bar{c}^i$ で置き換えている。

ここでは state の process が deterministic なので、price system がどのように決定されるかを計算可能である。今、$\tilde{s}^t = (1, 0, 1, 0, \cdots)$ と定義すると、それ以外の process は発生しえないことが分かっているので、

$$\pi_t(\tilde{s}^t) = 1, \tag{54}$$

$$\pi_t(s^t) = 0, \quad s^t \neq \tilde{s}^t, \tag{55}$$

である。従って、(53) より

$$q_t^0(s^t) = \beta^t \frac{u'(\bar{c}^i)}{\mu_i} \times 0 = 0, \quad s^t \neq \tilde{s}^t, \tag{56}$$

$$q_t^0(\tilde{s}^t) = \beta^t \frac{u'(\bar{c}^i)}{\mu_i} \times 1 = \beta^t \frac{u'(\bar{c}^i)}{\mu_i}, \tag{57}$$

が成立する。ここで、$q_0^0(\tilde{s}^0)=1$ に基準化すると

$$q_0^0(\tilde{s}^0)=\beta^0\frac{u'(\bar{c}^i)}{\mu_i}=1 \;\Leftrightarrow\; \frac{u'(\bar{c}^i)}{\mu_i}=1. \tag{58}$$

従って、任意の t 期について

$$q_t^0(\tilde{s}^t)=\beta^t\frac{u'(\bar{c}^i)}{\mu_i}=\beta^t, \quad \forall t, s^t \tag{59}$$

である。以上より、price system は以下の様に求められる。

$$q_t^0(s^t)=\begin{cases}\beta^t, & \text{if: } s^t=\tilde{s}^t,\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases} \quad \forall t \tag{60}$$

次に、一定の個人の消費 $\bar{c}^i$ を求める。price system を予算制約式に代入すると

$$\begin{aligned}\sum_{t=0}^{\infty}\sum_{s^t}\beta^t\pi_t(s^t)\frac{u'(\bar{c}^i)}{\mu_i}\bar{c}^i &= \sum_{t=0}^{\infty}\sum_{s^t}\beta^t\pi_t(s^t)\frac{u'(\bar{c}^i)}{\mu_i}y_t^i(s^t)\\ \Leftrightarrow\; \bar{c}^i\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t\underbrace{\sum_{s^t}\pi_t(s^t)}_{=1} &= \sum_{t=0}^{\infty}\beta^t\sum_{s^t}\pi_t(s^t)y_t^i(s^t).\end{aligned} \tag{61}$$

ここで、$\tilde{s}^t$ 以外の process は発生しえないことを利用すると

$$\bar{c}^i(1-\beta)^{-1}=\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t\pi_t(\tilde{s}^t)y_t^i(\tilde{s}^t), \quad \forall t, s^t \tag{62}$$

最後に、$y^1=(1,0,1,0,\cdots)$、$y^2=(0,1,0,1,\cdots)$ なので

$$\bar{c}^1(1-\beta)^{-1} = 1+\beta^2+\beta^4+\beta^6+\cdots \;\Rightarrow\; \bar{c}^1=\frac{1}{1+\beta}, \tag{63}$$

$$\bar{c}^2(1-\beta)^{-1} = \beta+\beta^3+\beta^5+\beta^7+\cdots \;\Rightarrow\; \bar{c}^2=\frac{\beta}{1+\beta}. \tag{64}$$

但し、$\frac{1}{1+\beta}+\frac{\beta}{1+\beta}=1$ より、資源制約は満たされている。

Example 2 と同様に、経済全体では不確実性が存在しない事と、Arrow-Debreu security の取引によって complete market が成立し、各個人のリスクが完全に share されているために、消費は t、s^t とは独立に常に一定になっている。第 1 個人の方が消費が高いのは、第 1 個人は 1 期早く endowment を受け取るため、無限期先までの endowment の割引現在価値の総和がより大きくなるからである。

以上より、Arrow-Debreu Equilibrium (ADE) は

$$c_t^1(s^t)=\bar{c}^1=\frac{1}{1+\beta}, \quad c_t^2(s^t)=\bar{c}^2=\frac{\beta}{1+\beta}, \quad \forall t, s^t \tag{65}$$

$$q_t^0(s^t)=\begin{cases}\beta^t, & \text{if: } s^t=\tilde{s}^t,\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases} \quad \forall t \tag{66}$$

によって特徴付けられる。