マクロ経済II第四回宿題解答[†]

TA：荒渡良[‡]

問題1

(問題1-1)

- k_t, A_t が state variable (状態変数) であり、c_t が control variable (操作変数) である。
- k_t は、その値が (前の期までの) 操作変数の値の選択に依存する内生的 state variable であり、A_t は、その値が操作変数の値の選択に依存しない外生的 state variable である。

(問題1-2)
Soical Planner の問題は、Bellman equation を用いると以下の様に定式化される。

$$V(k,A)=\max_c \left\{v(c)+\beta E\left[V(k',A')|A\right]\right\}, \tag{1}$$

$$\text{s.t.}\quad k'=Af(k)-c+(1-\delta)k, \tag{2}$$

$$A'=g(A,\epsilon'). \tag{3}$$

もしくは、

$$V(k,A)=\max_c \left\{v(c)+\beta E\left[V(Af(k)-c+(1-\delta)k,A')|A\right]\right\}, \tag{4}$$

$$\text{s.t.}\quad A'=g(A,\epsilon'). \tag{5}$$

(問題1-3)
Bellman equation の max operator の中身の最大化のための First order condition は、

$$v'(c)+\beta E\left[\frac{\partial k'}{\partial c}\frac{\partial V(k',A')}{\partial k'}\Bigg|A\right]=0. \tag{6}$$

[†]解答の作成にあたっては、経済学研究科 D1 の川元康一氏に協力して頂いた。

[‡]E-mail address:ege001ar@mail2.econ.osaka-u.ac.jp

ここで、$k' = Af(k) - c + (1-\delta)k$ より、$\partial k'/\partial c = -1$ であるから、First order condition (f.o.c.) は以下のようになる。

$$v'(c) = \beta E\left[\frac{\partial V(k', A')}{\partial k'}\Big| A\right]. \qquad \text{(f.o.c.)} \tag{7}$$

上の f.o.c. より得られる policy function を $c = h(k, A)$ とする。$h(k, A)$ を Bellman equation に代入すると、

$$V(k, A) = v\left(h(k, A)\right) + \beta E\left[V(Af(k) - h(k, A) + (1-\delta)k, A')|A\right]. \tag{8}$$

この式の両辺を k で微分すると、以下のようになる。

$$\begin{aligned}\frac{\partial V(k, A)}{\partial k} &= v'\left(h(k, A)\right)\frac{\partial h(k, A)}{\partial k} + \beta E\left[\frac{\partial V(k', A')}{\partial k'}\left(Af'(k) - \frac{\partial h(k, A)}{\partial k} + 1 - \delta\right)\Big| A\right] \qquad (9)\\ &= v'\left(h(k, A)\right)\frac{\partial h(k, A)}{\partial k} - \beta\frac{\partial h(k, A)}{\partial k}E\left[\frac{\partial V(k', A')}{\partial k'}\Big| A\right]\\ &\quad + \beta(Af'(k) + 1 - \delta)E\left[\frac{\partial V(k', A')}{\partial k'}\Big| A\right]\end{aligned}$$

ここで、(7) 式の (f.o.c.) を用いると、$\partial h(k, A)/\partial k$ の掛かる項が差し引きして打ち消しあうことになり、以下の Benveniste Scheinkman condition (B.S.) が得られる[1]。

$$\frac{\partial V(k, A)}{\partial k} = \beta E\left[\frac{\partial V'(k', A')}{\partial k'}\Big| A\right]\left(Af'(k) + 1 - \delta\right). \qquad \text{(B.S.)} \tag{10}$$

(問題 1-4)
(10) 式の B.S. に (7) 式の f.o.c. を代入すると、

$$\frac{\partial V(k, A)}{\partial k} = v'(c)\left(Af'(k) + 1 - \delta\right). \tag{11}$$

この式の 1 期先のものは、

$$\frac{\partial V(k', A')}{\partial k'} = v'(c')\left(A'f'(k') + 1 - \delta\right). \tag{12}$$

この式の両辺の、今期の（A を given とした）期待値を取る。

$$E\left[\frac{\partial V(k', A')}{\partial k'}\Big| A\right] = E\left[v'(c')\left(A'f'(k') + 1 - \delta\right)|A\right]. \tag{13}$$

左辺に前問で得た f.o.c. を代入して、value function を消去すると、以下の Euler equation を得る。

$$v'(c) = \beta E\left[v'(c')\left(A'f'(k') + 1 - \delta\right)|A\right]. \tag{14}$$

[1] 最後の括弧の中の値は今期に確定しており確率変数ではないので、期待値オペレータの外に出せる。

(問題 1-5)
前問で得た Euler equation は、以下のように直せる。

$$1 = E\left[\frac{\beta v'(c')}{v'(c)}\left(A'f'(k')+1-\delta\right)\Big| A\right]. \tag{15}$$

右辺の期待値の中身について、

- $\frac{\beta v'(c')}{v'(c)}$: 今期の消費と来期の消費の間の異時点の限界代替率 (MRS)。次期の追加的な 1 単位の消費を今期の消費で測った価値を表す。
- $A'f'(k')+1-\delta$: 今期の財と次期の財の間の限界変形率 (MRT)。今期から追加的に 1 単位、次期へ資本を持ち越すことが、次期にどれだけの財を生み出すかを表す。

すなわち (MRS) × (MRT) は、今期 1 単位の消費をあきらめて次期へ持ち越すことで得られる次期の消費の限界的な増加分増加分の、今期の消費財で測った価値を表している。Euler equation は、それが平均的に 1 (今期の消費財の今期の消費財で測った価値) に等しくなければならない、ということを示している[2]。

(問題 1-6)
資本ストックの遷移式 $k' = Af(k) - c + (1-\delta)k$ より c を代入することで、この問題の Bellman equation は以下のように定式化しなおせる。

$$V(k,A) = \max_{k'}\left\{v(Af(k)+(1-\delta)k-k') + \beta E\left[V(k',A')|A\right]\right\}, \tag{16}$$

$$\text{s.t.} \quad A' = g(A,\epsilon'). \tag{17}$$

(問題 1-7)
前問で得た Bellman equation の右辺の k' についての f.o.c. は

$$-v'(Af(k)+(1-\delta)k-k') + \beta E\left[\frac{\partial V(k',A')}{\partial k'}\Big| A\right] = 0, \tag{18}$$

$$\Longleftrightarrow \quad v'(Af(k)+(1-\delta)k-k') = \beta E\left[\frac{\partial V(k',A')}{\partial k'}\Big| A\right]. \qquad \text{(f.o.c.)} \tag{19}$$

もしくは、

$$v'(c) = \beta E\left[\frac{\partial V(k',A')}{\partial k'}\Big| A\right]. \tag{20}$$

この f.o.c. より得られる policy function を $k' = \phi(k,A)$ とする。$\phi(k,A)$ をこの Bellman equation に代入すると、最大化された Value を以下のように得る。

$$V(k,A) = \left\{v(Af(k)+(1-\delta)k-\phi(k,A)) + \beta E\left[V(\phi(k,A),A')|A\right]\right\}. \tag{21}$$

[2]Euler equation を $v'(c) = \ldots$ という形のままで解釈すると、今期 1 単位の消費をあきらめる事による限界的な効用の減少分（左辺）が、次期に消費が増えることによる限界的な効用の増加分の期待値（右辺）に等しくなければならない、ということになる。

この式の両辺を k で微分すると、

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial V(k,A)}{\partial k} &= v'(Af(k)+(1-\delta)k-\phi(k,A))\left\{Af'(k)+1-\delta-\frac{\partial \phi(k,A)}{\partial k}\right\} \\
&\qquad\qquad +\beta E\left[\frac{\partial V(k',A')}{\partial k'}\Big|A\right]\frac{\partial \phi(k,A)}{\partial k} \\
&= v'(Af(k)+(1-\delta)k-\phi(k,A))\left\{Af'(k)+1-\delta\right\} \qquad (22)\\
&\quad -v'(Af(k)+(1-\delta)k-\phi(k,A))\frac{\partial \phi(k,A)}{\partial k}+\beta E\left[\frac{\partial V(k',A')}{\partial k'}\Big|A\right]\frac{\partial \phi(k,A)}{\partial k}
\end{aligned}
$$

となる[3]。ここで、(20) 式の (f.o.c.) を用いると、$\partial\phi(k,A)/\partial k$ の掛かる項が差し引きして打ち消しあうことになり、以下の Benveniste Scheinkman condition (B.S.) が得られる。

$$
\frac{\partial V(k,A)}{\partial k} = v'(c)\left(Af'(k)+1-\delta\right) \qquad \text{(B.S.)} \tag{23}
$$

この B.S. 条件を 1 期先にずらしたものの両辺の、今期の (A を given とした) 期待値をとると、

$$
E\left[\frac{\partial V(k',A')}{\partial k'}\Big|A\right] = E\left[v'(c')\left(A'f'(k')+1-\delta\right)\ |A\right]. \tag{24}
$$

この左辺に、先ほど導出した (20) 式の f.o.c. を代入することで、以下の Euler equation を得る。

$$
v'(c) = \beta E\left[v'(c')\left(A'f'(k')+1-\delta\right)\ |A\right]. \tag{25}
$$

問題 2

(問題 2-1)

θ_t の law of motion は、

$$
\theta_{t+1} = \log 10 + 0.3\theta_t + 0.2\theta_{t-1} + \gamma\epsilon_{t+1}. \tag{26}
$$

この law of motion は行列形式を用いて以下のように直せる。

$$
\begin{bmatrix}\theta_{t+1}\\ \theta_t \\ 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0.3 & 0.2 & \log 10\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta_t\\ \theta_{t-1}\\ 1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\gamma\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\epsilon_{t+1}, \tag{27}
$$

$$
\theta_t = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta_t\\ \theta_{t-1}\\ 1\end{bmatrix}. \tag{28}
$$

[3] $\phi(k,A)$ は、k と A を given としたとき確率変数ではないから、最後の項の $\partial\phi(k,A)/\partial k$ は期待値の外に出せる。

θ_t が定常分布に従っているとき、$E[\theta_{t+1}] = E[\theta_t]E[\theta_{t-1}] = \bar{\theta}$ を満たさなくてはならない。従って (27) 式の両辺に期待値を取ると、$E[\epsilon_{t+1} = 0]$ より、

$$\begin{bmatrix} \bar{\theta} \\ \bar{\theta} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\theta} \\ \bar{\theta} \\ 1 \end{bmatrix} \tag{29}$$

を満たす $\bar{\theta}$ が、定常分布における θ_t の平均である。これを $\bar{\theta}$ について解くことで、

$$\bar{\theta} = 2, \tag{30}$$

を得る。

(問題 2-2)
この問題は以下のように定式化される。

$$\max \quad E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left(-\frac{1}{c_t} \right), \tag{31}$$

$$\text{s.t.} \quad k_{t+1} = (\exp \theta_t) k_t^{0.5} - c_t + 0.8 k_t, \tag{32}$$

$$\theta_{t+1} = \log 10 + 0.3\theta_t + 0.2\theta_{t-1} + \gamma \epsilon_{t+1}. \tag{33}$$

(32) 式より $c_t = (\exp \theta_t) k_t^{0.5} + 0.8 k_t - k_{t+1}$ なので、

$$E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left(-\frac{1}{c_t} \right) = E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left(-\frac{1}{(\exp \theta_t) k_t^{0.5} + 0.8 k_t - k_{t+1}} \right). \tag{34}$$

k_{t+1} について f.o.c. を求めると、t 期において

$$E_t \left[\beta^t \frac{-1}{\{(\exp \theta_t) k_t^{0.5} + 0.8 k_t - k_{t+1}\}^2} + \beta^{t+1} \frac{0.5(\exp \theta_{t+1}) k_{t+1}^{-0.5} + 0.8}{\{(\exp \theta_{t+1}) k_{t+1}^{0.5} + 0.8 k_{t+1} - k_{t+2}\}^2} \right] = 0. \tag{35}$$

ここで、$c_t = (\exp \theta_t) k_t^{0.5} + 0.8 k_t - k_{t+1}$ なので、この f.o.c. は

$$-\frac{1}{c_t^2} + E_t \left[\frac{\beta}{c_{t+1}^2} \{0.5(\exp \theta_{t+1}) k_{t+1}^{-0.5} + 0.8\} \right] = 0. \tag{36}$$

従って、

$$1 = E_t \left[\frac{\beta c_t^2}{c_{t+1}^2} \{0.5(\exp \theta_{t+1}) k_{t+1}^{-0.5} + 0.8\} \right]. \tag{37}$$

これが Euler equation である[4]。

[4] E_t は t 期の情報に基づく期待値を表す。具体的には、θ_{t+1} が θ_{t-1} までに依存するので、情報として θ_t と θ_{t-1} を含んでいれば良いことになる。すなわち、$E_t[\,\cdot\,] = E[\,\cdot\,|\theta_t, \theta_{t-1}]$ である。

(問題 2-3)
$\gamma = 0$ の時の問題は、

$$\max \quad \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left(-\frac{1}{c_t} \right), \tag{38}$$

$$\text{s.t.} \quad k_{t+1} = (\exp\theta_t) k_t^{0.5} - c_t + 0.8k_t, \tag{39}$$

$$\theta_{t+1} = \log 10 + 0.3\theta_t + 0.2\theta_{t-1}. \tag{40}$$

また、Euler equation は

$$1 = \frac{\beta c_t^2}{c_{t+1}^2} \{0.5(\exp\theta_{t+1}) k_{t+1}^{-0.5} + 0.8\}. \tag{41}$$

この Euler equation と制約条件式により、定常値 $\{\bar{k}, \bar{c}, \bar{\theta}\}$ を求める方程式は以下の 3 本となる。

$$\bar{k} = \exp(\bar{\theta}) \bar{k}^{0.5} - \bar{c} + 0.8\bar{k}, \tag{42}$$

$$\bar{\theta} = \log 10 + 0.3\bar{\theta} + 0.2\bar{\theta}, \tag{43}$$

$$1 = 0.9\{0.5 \exp(\bar{\theta}) \bar{k}^{-0.5} + 0.8\}. \tag{44}$$

(43) より

$$\bar{\theta} = 2. \tag{45}$$

これを (44) に代入して $\bar{k}$ について解くと、

$$\begin{aligned} \bar{k} &= (1.6071 \exp(2))^2 \\ &\approx 141.0230. \end{aligned} \tag{46}$$

さらに、$\bar{\theta}, \bar{k}$ を (42) に代入して $\bar{c}$ について解くことで、

$$\begin{aligned} \bar{c} &= \exp(\bar{\theta}) \bar{k}^{0.5} + 0.8\bar{k} - \bar{k} \\ &= 59.5426, \end{aligned} \tag{47}$$

が得られる。
以上より、

$$\bar{k} = 141.0230, \quad \bar{c} = 59.5426. \tag{48}$$

(問題 2-4)
state variable の law of motion は、

$$k_{t+1} = (\exp\theta_t) k_t^{0.5} - c_t + 0.8k_t, \tag{49}$$

$$\theta_{t+1} = \log 10 + 0.3\theta_t + 0.2\theta_{t-1} + \gamma\epsilon_{t+1}. \tag{50}$$

k についての遷移式を $\{\bar{k}, \bar{c}, \bar{\theta}\}$ の周りで線形近似すると、

$$\begin{aligned}
k_{t+1} &\approx \bar{k} + \{0.5\exp(\bar{\theta})\bar{k}^{-0.5} + 0.8\}(k_t - \bar{k}) - 1 \cdot (c_t - \bar{c}) + \exp(\bar{\theta})\bar{k}^{0.5}(\theta_t - \bar{\theta}) \\
&= \bar{k} - \{0.5\exp(\bar{\theta})\bar{k}^{-0.5} + 0.8\}\bar{k} + \bar{c} - \exp(\bar{\theta})\bar{k}^{0.5}\bar{\theta} \\
&\qquad + \{0.5\exp(\bar{\theta})\bar{k}^{-0.5} + 0.8\}k_t - c_t + \exp(\bar{\theta})\bar{k}^{0.5}\theta_t,
\end{aligned} \tag{51}$$

これに、前問で求めた定常値を代入すると、

$$k_{t+1} = -131.6210 + 1.1111k_t - c_t + 87.7473\theta_t, \tag{52}$$

のように、近似した k_t の動学方程式が得られる。

従って、線形近似された law of motion は次の様に表すことができる。

$$\begin{bmatrix} k_{t+1} \\ \theta_{t+1} \\ \theta_t \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1111 & 87.7473 & 0 & -131.6210 \\ 0 & 0.3 & 0.2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_t \\ \theta_t \\ \theta_{t-1} \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} c_t + \begin{bmatrix} 0 \\ \gamma \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \epsilon_{t+1}. \tag{53}$$

ここで、state vector を $\mathbf{x}_t = [k_t, \theta_t, \theta_{t-1}, 1]'$、control vector を $\mathbf{u}_t = [c_t]$ と定義して、3 つの行列 A, B, C を

$$A = \begin{bmatrix} 1.1111 & 87.7473 & 0 & -131.6210 \\ 0 & 0.3 & 0.2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 \\ \gamma \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

と定義すると、この経済の全ての state variable の law of motion は以下のように線形近似できることになる。

$$\mathbf{x}_{t+1} = A\mathbf{x}_t + B\mathbf{u}_t + C\epsilon_{t+1}. \tag{54}$$

(問題 2-5)

felicity function $v(c_t) = -1/c_t$ を定常解周りで二次近似すると、

$$\begin{aligned}
v(c_t) &\approx -\frac{1}{\bar{c}} + \frac{1}{\bar{c}^2}(c_t - \bar{c}) - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\bar{c}^3}(c_t - \bar{c})^2 \\
&= -\frac{1}{\bar{c}} - \frac{1}{\bar{c}} - \frac{1}{\bar{c}} + \left(\frac{1}{\bar{c}^2} + \frac{2}{\bar{c}^2}\right) c_t - \frac{1}{\bar{c}^3} c_t^2.
\end{aligned} \tag{55}$$

これに、定常値を代入すると、

$$v(c_t) \approx -0.0504 + 0.0008c_t - 0.000005c_t^2, \tag{56}$$

のように、近似した felicity function が得られる。これを行列を用いて表すと、

$$v(c_t) \approx \begin{bmatrix} k_t & \theta_t & \theta_{t-1} & 1 & c_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.0504 & 0.0004 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0004 & -0.000005 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_t \\ \theta_t \\ \theta_{t-1} \\ 1 \\ c_t \end{bmatrix}. \tag{57}$$

従って、

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.0504 \end{bmatrix}, \ W = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.0004 \end{bmatrix}, \ Q = -0.000005 \tag{58}$$

と定義すると、(57) 式は

$$\begin{aligned} v(c_t) &= \begin{bmatrix} \mathbf{x}_t', \mathbf{u}_t' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & W \\ W' & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_t \\ \mathbf{u}_t \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{x}_t' R \mathbf{x}_t + \mathbf{u}_t' Q \mathbf{u}_t + 2\mathbf{x}_t' W \mathbf{u}_t \end{aligned} \tag{59}$$

と 2 次形式で表される。

問題 3

The Brock-Mirman problem

$$\max \quad E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ln c_t, \tag{60}$$

$$\text{s.t.} \quad c_t + k_{t+1} \leq A k_t^{\alpha} \theta_t, \tag{61}$$

$$k_0; \text{ given.}$$

この問題を、“Howard's improvement algorithm” (policy function iteration) によって解く。

まず、瞬時効用関数 $\ln c_t$ は単調増加関数であり、最大化の観点から、$c_t < A k_t^{\alpha} \theta_t - k_{t+1}$ なる c_t が選ばれることはない。従って、以下では

$$c_t + k_{t+1} = A k_t^{\alpha} \theta_t, \tag{62}$$

とする。このとき、上記の最大化問題は、k_{t+1} を control variable とする最大化問題、

$$\max \quad E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ln(A k_t^{\alpha} \theta_t - k_{t+1}), \tag{63}$$

$$\text{s.t.} \quad k_0; \text{ given,}$$

の様に書き換えられる。

Step 1.

Policy function に関する initial guess を

$$k_{t+1} = h_0(Ak_t^{\alpha}\theta_t), \quad \text{where} \quad h_0 \in (0,1), \tag{64}$$

とおく。

Step 2.

上記の guess で与えられた policy function に従った場合の value, $J_0(k_0, \theta_0)$ を計算する。

まず、この guess を目的関数に代入する。

$$J_0(k_0,\theta_0) = E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ln\{Ak_t^{\alpha}\theta_t - h_0(Ak_t^{\alpha}\theta_t)\} \tag{65}$$

$$= E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ln\{(1-h_0)Ak_t^{\alpha}\theta_t\} \tag{66}$$

$$= E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \{\ln(1-h_0)A + \alpha \ln k_t + \ln\theta_t\} \tag{67}$$

$$= \frac{1}{1-\beta}\ln(1-h_0)A + E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \alpha \ln k_t + \ln\theta_0, \tag{68}$$

だたし、最後の等式は、$t \geq 1$ について $E_0(\ln\theta_t) = 0$ であるという仮定による。

ここで、$k_{t+1} = h_0(Ak_t^{\alpha}\theta_t)$ より、

$$\ln k_{t+1} = \ln h_0 A + \alpha \ln k_t + \ln\theta_t, \tag{69}$$

であるので、

$$\begin{aligned}
\ln k_1 &= \ln h_0 A + \alpha \ln k_0 + \ln\theta_0, \\
\ln k_2 &= \ln h_0 A + \alpha \ln k_1 + \ln\theta_1 \\
&= (\ln h_0 A + \alpha \ln h_0 A) + \alpha^2 \ln k_0 + (\alpha \ln\theta_0 + \ln\theta_1), \\
\ln k_3 &= \ln h_0 A + \alpha \ln k_2 + \ln\theta_2, \\
&= (\ln h_0 A + \alpha \ln h_0 A + \alpha^2 \ln h_0 A) + \alpha^3 \ln k_0 + (\alpha^2 \ln\theta_0 + \alpha\ln\theta_1 + \ln\theta_2),
\end{aligned}$$

以下、繰り返すと $t \geq 1$ について、

$$\begin{aligned}
\ln k_t &= \left(\sum_{j=0}^{t-1} \alpha^j\right) \ln(h_0 A) + \alpha^t \ln k_0 + \sum_{j=0}^{t-1} \left(\alpha^{t-1-j} \ln\theta_j\right), \\
&= \frac{1-\alpha^t}{1-\alpha} \ln(h_0 A) + \alpha^t \ln k_0 + \sum_{j=0}^{t-1} \left(\alpha^{t-1-j} \ln\theta_j\right).
\end{aligned} \tag{70}$$

これを用いると、$t \geq 1$ について、

$$E_0 \beta^t \alpha \ln k_t = \frac{\alpha}{1-\alpha}(\beta^t - (\alpha\beta)^t) \ln(h_0 A) + (\alpha\beta)^t \alpha \ln k_0 + (\alpha\beta)^t \ln \theta_0, \tag{71}$$

ただし、先ほどと同様 $t \geq 1$ について $E_0(\ln \theta_t) = 0$ であることを用いている。従って、

$$E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \alpha \ln k_t = \frac{\alpha}{1-\alpha}\left(\frac{\beta}{1-\beta} - \frac{\alpha\beta}{1-\alpha\beta}\right) \ln(h_0 A) + \frac{\alpha}{1-\alpha\beta} \ln k_0 + \frac{\alpha\beta}{1-\alpha\beta} \ln \theta_0, \tag{72}$$

となり、(72) を (68) に代入すると、

$$J_0(k_0, \theta_0) = \tilde{A}_0 + \frac{\alpha}{1-\alpha\beta} \ln k_0 + \frac{1}{1-\alpha\beta} \ln \theta_0, \tag{73}$$

$$\text{但し、} \quad \tilde{A}_0 \equiv \frac{1}{1-\beta} \ln(1-h_0)A + \frac{\alpha}{1-\alpha}\left(\frac{\beta}{1-\beta} - \frac{\alpha\beta}{1-\alpha\beta}\right) \ln(h_0 A),$$

が得られる。

Step 3.

(71) 式によって value function が与えられているときの新しい policy function を導出する。今、

$$\max_{k'} \quad \ln(Ak^\alpha \theta - k') + \beta E J_0(k', \theta'), \tag{74}$$

という最大化問題を考える。(73) より、

$$\frac{\partial J_0(k', \theta')}{\partial k'} = \frac{\alpha}{1-\alpha\beta} \frac{1}{k'}, \tag{75}$$

であるので、この問題の f.o.c. は、

$$-\frac{1}{Ak^\alpha \theta - k'} + \frac{\alpha\beta}{1-\alpha\beta} \frac{1}{k'} = 0, \tag{76}$$

と得られる。これを k' について解くことで、新しい policy function

$$k' = h_1(Ak^\alpha \theta), \quad \text{where} \quad h_1 = \alpha\beta, \tag{77}$$

が得られる。

Step 4.

以上の手順を繰り返す。policy function $k' = h_1(Ak^\alpha \theta)$ に従った場合の value function を $J_1(k_0, \theta_0)$ と置く。policy function が最初の guess と同じく $(Ak^\alpha \theta)$ の定数倍で与えられていることから、h_0 を h_1 で置き換えるだけで、(73) を求めたときと同様の手順で $J_1(k_0, \theta_0)$ を求めることができ、

$$J_1(k_0, \theta_0) = \tilde{B}_1 + \frac{\alpha}{1-\alpha\beta} \ln k_0 + \frac{1}{1-\alpha\beta} \ln \theta_0, \tag{78}$$

$$\text{但し、} \quad \tilde{B}_1 \equiv \frac{1}{1-\beta} \ln(1-h_1)A + \frac{\alpha}{1-\alpha}\left(\frac{\beta}{1-\beta} - \frac{\alpha\beta}{1-\alpha\beta}\right) \ln(h_1 A),$$

が得られる。

次に、

$$\max_{k'} \quad \ln(Ak^{\alpha}\theta - k') + \beta E J_1(k', \theta'), \tag{79}$$

を解く。f.o.c. は、

$$-\frac{1}{Ak^{\alpha}\theta - k'} + \frac{\alpha\beta}{1-\alpha\beta}\frac{1}{k'} = 0, \tag{80}$$

であり、これを k' について解くことで、新しい policy function

$$k' = h_2(Ak^{\alpha}\theta), \quad \text{where} \quad h_2 = \alpha\beta, \tag{81}$$

を得る。

ここで (77) と (81) を比べると、$h_1 = h_2$ であり、全く同じ形の policy function になっている。よって (77) がこの問題の最適な policy であり、それによって導かれた (78) が正しい value function である。

以上より、Howard's improvement algorithm によって、1 回の iteration で optimal policy function に収束することが確認された。