マクロ経済II第三回宿題解答[†]

TA：荒渡良[‡]

05/11/10

問題1

(問題 1-1)

第 T 期の問題は以下の様に表される。

$$\begin{cases} \max_{c_T} u(c_T) = \ln c_T \\ \text{s.t.} \quad W_T - C_T \geq 0,\ W_T \text{：given} \end{cases} \tag{1}$$

効用関数は増加関数なので、$c_T = W_T$。従って、

$$\left(\begin{array}{l} \text{policy function：} h_T(W_T) = W_T \\ \text{value function ：} V_T(W_T) = u\left(h_T(W_T)\right) = \ln W_T \end{array} \right. \tag{2}$$

(問題 1-2)

第 $T-1$ 期の問題は以下の様に表される。

$$\begin{cases} \max_{c_{T-1}} u(c_{T-1}) + \beta u(c_T) \\ \text{s.t.} \quad W_T = W_{T-1} - C_{T-1},\ W_{T-1} \text{：given} \end{cases} \tag{3}$$

(問題 1-1) より $V_T = \ln W_T$ なので、Bellman equation は

$$\begin{aligned} V_{T-1}(W_{T-1}) &= \max\left\{u(c_{T-1}) + \beta V_T(W_T)\right\} \\ &= \max\left\{\ln c_{T-1} + \beta \ln(W_{T-1} - c_{T-1})\right\} \end{aligned} \tag{4}$$

である。Bellman equation の左辺の max operator の中身を今期の control variable c_{T-1} について最大化すると、f.o.c. は

$$\frac{1}{c_{T-1}} - \beta \frac{1}{W_{T-1} - c_{T-1}} = 0 \iff c_{T-1} = \frac{W_{T-1}}{1+\beta} \tag{5}$$

[†]解答の作成にあたっては、経済学研究科 D1 の川元康一氏に協力して頂いた。

[‡]E-mail address:ege001ar@mail2.econ.osaka-u.ac.jp

従って、policy function は

$$h_{T-1}(W_{T-1}) = \frac{W_{T-1}}{1+\beta} \tag{6}$$

である。次に、(6) の policy function を Bellman equation に代入すると、max operator が外れて、

$$\begin{aligned} V_{T-1}(W_{T-1}) &= u\left(h_{T-1}(W_{T-1})\right) + \beta V_T\left(W_{T-1} - h_{T-1}(W_{T-1})\right) \\ &= \ln\left(\frac{W_{T-1}}{1+\beta}\right) + \beta \ln\left(W_{T-1} - \frac{W_{T-1}}{1+\beta}\right) \end{aligned} \tag{7}$$

これを解くと、value function は

$$V_{T-1}(W_{T-1}) = (1+\beta)\ln W_{T-1} + \beta\ln\beta - (1+\beta)\ln(1+\beta)$$

と求まる。以上より

$$\left(\begin{array}{l} \text{policy function}：h_{T-1}(W_{T-1}) = \frac{1}{1+\beta}W_{T-1} \\ \text{value function}\;：V_{T-1}(W_{T-1}) = (1+\beta)\ln W_{T-1} + \beta\ln\beta - (1+\beta)\ln(1+\beta) \end{array} \right.$$

(問題 1-3)

第 $T-2$ 期の問題は以下の様に表される。

$$\left\{ \begin{array}{ll} \max_{c_{T-2}} u(c_{T-2}) + \beta V_{T-1}(W_{T-1}) & \\ \text{s.t.} \qquad W_T = W_{T-1} - C_{T-1},\; W_{T-1}：\text{given} & \end{array} \right. \tag{8}$$

(問題 1-2) で求めた V_{T-1} を用いると、Bellman equation は

$$\begin{aligned} V_{T-2}(W_{T-2}) &= \max\left\{u(c_{T-2}) + \beta V_{T-1}(W_{T-1})\right\} \\ &= \max\left\{\ln c_{T-2} + \beta V_{T-1}(W_{T-2} - c_{T-2})\right\} \qquad (9) \\ &= \max\left\{\ln c_{T-2} + \beta(1+\beta)\ln(W_{T-2} - c_{T-2}) + \beta^2\ln\beta - \beta(1+\beta)\ln(1+\beta)\right\} \qquad (10) \end{aligned}$$

である。Bellman equation の左辺の max operator の中身を今期の control variable c_{T-2} について最大化すると、f.o.c. は

$$\frac{1}{c_{T-2}} - \beta(1+\beta)\frac{1}{W_{T-2} - c_{T-2}} = 0 \;\Leftrightarrow\; c_{T-2} = h_{T-2}(W_{T-2}) = \frac{W_{T-2}}{1+\beta+\beta^2} \tag{11}$$

従って policy function は

$$h_{T-2}(W_{T-2}) = \frac{W_{T-2}}{1+\beta+\beta^2} \tag{12}$$

次に、(12) の policy function を Bellman equation に代入すると、max operator が外れて、

$$\begin{aligned}
V_{T-2}(W_{T-2}) &= u\left(h_{T-2}(W_{T-2})\right) + \beta V_{T-1}\left(W_{T-2} - h_{T-2}(W_{T-2})\right) \\
&= \ln\left(\frac{W_{T-2}}{1+\beta+\beta^2}\right) + \beta V_{T-1}\left(\frac{\beta(1+\beta)W_{T-2}}{1+\beta+\beta^2}\right) \\
&= \ln W_{T-2} - \ln(1+\beta+\beta^2) + \beta(1+\beta)\ln\beta + \beta(1+\beta)\ln(1+\beta) \\
&\quad +\beta(1+\beta)\ln W_{T-2} - \beta(1+\beta)\ln(1+\beta+\beta^2) + \beta^2\ln\beta - \beta(1+\beta)\ln(1+\beta)
\end{aligned}$$

従って、value function は

$$V_{T-2}(W_{T-2}) = (1+\beta+\beta^2)\ln W_{T-2} - (1+\beta+\beta^2)\ln(1+\beta+\beta^2) + (\beta+2\beta^2)\ln\beta \tag{13}$$

と求まる。以上より

$$\left(\begin{array}{l}
\text{policy function}：h_{T-2}(W_{T-2}) = \frac{W_{T-2}}{1+\beta+\beta^2} \\
\text{value function}\ ：V_{T-2}(W_{T-2}) = (1+\beta+\beta^2)\ln W_{T-2} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad -(1+\beta+\beta^2)\ln(1+\beta+\beta^2) + (\beta+2\beta^2)\ln\beta
\end{array}\right.$$

(問題 1-4)

(問題 1-2) と (問題 1-3) より、$T-s$ 期の value function は次のような形をしていると guess する。

$$\tilde{V}_{T-s}(W_{T-s}) = \left(\sum_{i=0}^{s}\beta^i\right)\ln W_{T-s} + \left(\sum_{i=0}^{s}i\beta^i\right)\ln\beta - \left(\sum_{i=0}^{s}\beta^i\right)\ln\left(\sum_{i=0}^{s}\beta^i\right) \tag{14}$$

これが正しい guess であることを確認する。もしも上記の予想が正しいのならば、$T-s$ 期の Bellman equation

$$V_{T-s}(W_{T-s}) = \max\left\{u(c_{T-s}) + \beta\tilde{V}_{T-(s-1)}(W_{T-(s-1)})\right\} \tag{15}$$

を解いたとき、求められた value function $V_{T-s}(W_{T-s})$ は予想した value function $\tilde{V}_{T-s}(W_{T-s})$ と一致するはずである。(14) を (15) に代入すると

$$\begin{aligned}
V_{T-s}(W_{T-s}) &= \max\left\{\ln c_{T-s}) + \beta\left(\sum_{i=0}^{s-1}\beta^i\right)\ln(W_{T-s} - c_{T-s})\right. \\
&\qquad \left. +\beta\left(\sum_{i=0}^{s-1}i\beta^i\right)\ln\beta - \beta\left(\sum_{i=0}^{s-1}\beta^i\right)\ln\left(\sum_{i=0}^{s-1}\beta^i\right)\right\}
\end{aligned} \tag{16}$$

右辺の max operator の中身を $T-s$ 期の control variable c_{T-s} について最大化すると、policy function は

$$h_{T-s}(W_{T-s}) = \frac{W_{T-s}}{\sum_{i=0}^{s}\beta^i} \tag{17}$$

と求められる。この policy function を (15) の Bellman equation に代入すると、max operator が外れて

$$
\begin{aligned}
V_{T-s}(W_{T-s}) &= \ln\left(\frac{W_{T-s}}{\sum_{i=0}^{s}\beta^i}\right)+\beta\left(\sum_{i=0}^{s-1}\beta^i\right)\ln\left(\frac{\beta\left(\sum_{i=0}^{s-1}\beta^i\right)W_{T-s}}{\sum_{i=0}^{s}\beta^i}\right) \\
&\quad +\beta\left(\sum_{i=0}^{s-1}i\beta^i\right)\ln\beta-\beta\left(\sum_{i=0}^{s-1}\beta^i\right)\ln\left(\sum_{i=0}^{s-1}\beta^i\right) \\
&= \ln W_{T-s}-\ln\left(\sum_{i=0}^{s}\beta^i\right)+\beta\left(\sum_{i=0}^{s-1}\beta^i\right)\ln\beta+\beta\left(\sum_{i=0}^{s-1}\beta^i\right)\ln\left(\sum_{i=0}^{s-1}\beta^i\right) \\
&\quad +\beta\left(\sum_{i=0}^{s-1}\beta^i\right)\ln W_{T-s}-\beta\left(\sum_{i=0}^{s-1}\beta^i\right)\ln\left(\sum_{i=0}^{s}\beta^i\right)+\beta\left(\sum_{i=0}^{s-1}i\beta^i\right)\ln\beta \\
&\qquad -\beta\left(\sum_{i=0}^{s-1}\beta^i\right)\ln\left(\sum_{i=0}^{s-1}\beta^i\right)
\end{aligned}
$$

これをまとめると

$$
V_{T-s}(W_{T-s})=\left(\sum_{i=0}^{s}\beta^i\right)\ln W_{T-s}+\left(\sum_{i=0}^{s}i\beta^i\right)\ln\beta-\left(\sum_{i=0}^{s}\beta^i\right)\ln\left(\sum_{i=0}^{s}\beta^i\right) \tag{18}
$$

これは (14) の式と完全に一致している。従って、(14) での guess は正しかったと結論付けられる。

(問題 1-5)

$t=T-s$ とおくと、(18) より

$$
V_t(W_t)=\left(\sum_{i=0}^{T-t}\beta^i\right)\ln W_t+\left(\sum_{i=0}^{T-t}i\beta^i\right)\ln\beta-\left(\sum_{i=0}^{T-t}\beta^i\right)\ln\left(\sum_{i=0}^{T-t}\beta^i\right) \tag{19}
$$

ここで、t を fixed にして $T\to+\infty$ の極限をとると、無限期問題における任意の第 t 期における value funaction は

$$
V_t(W_t)=\left(\sum_{i=0}^{\infty}\beta^i\right)\ln W_t+\left(\sum_{i=0}^{\infty}i\beta^i\right)\ln\beta-\left(\sum_{i=0}^{\infty}\beta^i\right)\ln\left(\sum_{i=0}^{\infty}\beta^i\right) \tag{20}
$$

となる。この時

$$
\sum_{i=0}^{\infty}\beta^i = \frac{1}{1-\beta} \tag{21}
$$

$$
\sum_{i=0}^{\infty}i\beta^i = \frac{\beta}{(1-\beta)^2} \tag{22}
$$

なので[1] value function は

$$V_t(W_t) = \frac{1}{1-\beta}\ln W_t + \frac{\beta}{(1-\beta)^2}\ln\beta + \frac{1}{1-\beta}\ln(1-\beta) \tag{23}$$

ここで、無限期問題においては model の stationarity より、任意の t 期について value function の関数形は同一となる。従って $V_t(W_t) = V(W)$ とおくと、無限期問題における value function は

$$V(W) = \frac{1}{1-\beta}\ln W + \frac{\beta}{(1-\beta)^2}\ln\beta + \frac{1}{1-\beta}\ln(1-\beta) \tag{24}$$

と求められる。

次に policy function を求める。model の stationarity より t 期と $t+1$ 期の value function の関数形が同一になることを用いると、Bellman equation は

$$\begin{aligned} V(W) &= \max\left\{u(c) + \beta V(W')\right\} \\ &= \max\{u(c) + \beta V(W-c)\} \end{aligned} \tag{25}$$

となる。但し W' は時期の W を表し、$W' = W - c$ である。(24) を (25) に代入して、max operator の中身を最大化すると、

$$\frac{1}{c} - \frac{\beta}{1-\beta}\frac{1}{W-c} = 0 \;\Leftrightarrow\; c = (1-\beta)W \tag{26}$$

従って、無限期問題における policy function は

$$h(W) = (1-\beta)W \tag{27}$$

と求められる。

最後に、求められた value function と policy function が正しいものであることを確認する。求められた value function と policy function を Bellman equation の右辺に代入すると、max operator が外れて、

$$V(W) = \ln\{(1-\beta)W\} + \beta\left\{\frac{1}{1-\beta}\ln(W - h(W)) + \frac{\beta}{(1-\beta)^2}\ln\beta + \frac{1}{1-\beta}\ln(1-\beta)\right\} \tag{28}$$

$$= \frac{1}{1-\beta}\ln W + \frac{\beta}{(1-\beta)^2}\ln\beta + \frac{1}{1-\beta}\ln(1-\beta) \tag{29}$$

[1] $S = \sum_{i=0}^{\infty} i\beta^i$ とおくと

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=0}^{\infty} i\beta^i = \beta + 2\beta^2 + 3\beta^3 + 4\beta^4 + 5\beta^5 \cdots \\ &= (\beta + \beta^2 + \beta^3 + \beta^4 + \beta^5 + \cdots) + (\beta^2 + 2\beta^3 + 3\beta^4 + 4\beta^5 + \cdots) \\ &= \beta(1 + \beta + \beta^2 + \beta^3 + \beta^4 + \cdots) + \beta(\underbrace{\beta + 2\beta^2 + 3\beta^3 + 4\beta^4 + 5\beta^5 \cdots}_{S}) \\ &= \beta\frac{1}{1-\beta} + \beta S \end{aligned}$$

より、$S = \frac{\beta}{(1-\beta)^2}$ である。

これは (24) と一致している。従って、求められた value function と policy function は正しいものであると結論づけられる。

(問題 1-6)

$T = 5$ の有限期問題を考える。(問題 1-4) の (17) より、policy function は

$$h_t(W_t) = \frac{1}{\sum_{i=0}^{5-t} \beta^i} W_t \Leftrightarrow h_{t+1}(W_{t+1}) = \beta h_t(W_t) \tag{30}$$

$$\tag{31}$$

となる。$W_0 = 1$ と $\beta = 0.9$ より

$$c_0 = h_0(W_0) = \frac{1}{\sum_{i=0}^{5-0} (0.9)^i} \approx 0.2134 \tag{32}$$

$$c_1 = h_1(W_1) = \beta c_0 \approx 0.192 \tag{33}$$

$$c_2 = h_2(W_2) = \beta c_1 \approx 0.173 \tag{34}$$

$$c_3 = h_3(W_3) = \beta c_2 \approx 0.156 \tag{35}$$

$$c_4 = h_4(W_4) = \beta c_3 \approx 0.140 \tag{36}$$

$$c_5 = h_5(W_5) = \beta c_4 \approx 0.126 \tag{37}$$

(問題 1-7)

(問題 1-5) の (27) より、無限期問題における policy function は

$$h(W_t) = (1 - \beta) W_t \tag{38}$$

この時、$c_t = (1 - \beta) W_t$ という関係を用いれば

$$c_{t+1} = (1 - \beta) W_{t+1} = (1 - \beta)(W_t - c_t) = \beta c_t \Leftrightarrow c_{t+1} = \beta c_t \tag{39}$$

以上より $W_0 = 1$、$\beta = 0.9$ の時、

$$c_0 = (1 - 0.9) = 0.1 \tag{40}$$

$$c_1 = (0.9) c_0 = 0.09 \tag{41}$$

$$c_2 = (0.9) c_1 = 0.081 \tag{42}$$

$$c_3 = (0.9) c_2 = 0.0729 \tag{43}$$

$$c_4 = (0.9) c_3 = 0.0656 \tag{44}$$

$$c_5 = (0.9) c_4 = 0.0590 \tag{45}$$

最後に有限期問題と無限期問題の消費経路の違いについて考える。どちらの経路も $c_{t+1} = \beta c_t$ という関係があり、毎期 $(1 - \beta)$ の率で消費を減らしていくことが分かる。しかし、$T = 5$ の有限期問題

と比べて無限期問題は消費する期間が長いため、有限期問題と同じ率で消費を減らすためには、初期の消費を少なくしなければならない。従って、有限期問題よりも無限期問題の方が初期の消費量が少なく、また、どちらの問題においても毎期 $(1-\beta)$ の率で消費が減少するような消費経路が確認される。

問題2

(問題 2-1)

T 期の policy function と value function は

$$h_T(W_T, r_T) = W_T \tag{46}$$
$$V_T(W_T, r_T) = \ln W_T \tag{47}$$

である。

$T-1$ 期の Bellman equation は

$$\begin{aligned} V_{T-1}(W_{T-1}, r_{T-1}) &= \max_{c_{T-1}} \left\{ u(c_{T-1}) + \beta E_{T-1} \left[V_T(W_T, r_T) \middle| r_{T-1} \right] \right\} \\ &= \max_{c_{T-1}} \left\{ \ln c_{T-1} + \beta E_{T-1} \left[V_T \left(r_T(W_{T-1} - c_{T-1}), r_T \right) \middle| r_{T-1} \right] \right\} \end{aligned} \tag{48}$$

ここで、(47) を用いると

$$\begin{aligned} E_{T-1} \left[V_T \left(r_T(W_{T-1} - c_{T-1}), r_T \right) \middle| r_{T-1} \right] &= E_{T-1} \left[\ln r_T + \ln(W_{T-1} - c_{T-1}) \middle| r_{T-1} \right] \\ &= \ln(W_{T-1} - c_{T-1}) + E_{T-1} \left[\ln r_T \middle| r_{T-1} \right] \end{aligned} \tag{49}$$

従って、$T-1$ 期の Bellman equation は以下の様に表される。

$$V_{T-1}(W_{T-1}, r_{T-1}) = \max_{c_{T-1}} \left\{ \ln c_{T-1} + \beta \ln(W_{T-1} - c_{T-1}) E_{T-1} \left[\ln r_{T-1} \middle| r_{T-1} \right] \right\} \tag{50}$$

次に、$T-1$ 期の policy function を求める。Bellman equation の右辺の max operator の中を最大化すると、f.o.c. は

$$\frac{1}{c_{T-1}} = \frac{\beta}{W_{T-1} - c_{T-1}} \tag{51}$$

従って、policy function は

$$h_{T-1}(W_{T-1}, r_{T-1}) = \frac{1}{1+\beta} W_{T-1} \tag{52}$$

と求められる。

次に、$T-1$ 期の value function を求める。(52) を Bellman equation に代入すると、max operator が外れて

$$
\begin{aligned}
V_{T-1}(W_{T-1}, r_{T-1}) &= \ln\left(\frac{1}{1+\beta}W_{T-1}\right) + \beta\ln\left(\frac{\beta}{1+\beta}W_{T-1}\right) + \beta E_{T-1}\left[\ln r_T \middle| r_{T-1}\right] \\
&= (1+\beta)\ln W_{T-1} + \beta\ln\beta - (1+\beta)\ln(1+\beta) + \beta E_{T-1}\left[\ln r_T \middle| r_{T-1}\right] \quad (53)
\end{aligned}
$$

従って、value function は

$$
V_{T-1}(W_{T-1}, r_{T-1}) = (1+\beta)\ln W_{T-1} + \beta\ln\beta - (1+\beta)\ln(1+\beta) + \beta E_{T-1}\left[\ln r_T \middle| r_{T-1}\right] \quad (54)
$$

と求められる。

(問題 2-2)

$T-2$ 期の Bellman equation は

$$
\begin{aligned}
V_{T-2}(W_{T-2}, r_{T-2}) &= \max_{c_{T-2}}\left\{u(c_{T-2}) + \beta E_{T-2}\left[V_{T-1}(W_{T-1}, r_{T-1} \middle| r_{T-2})\right]\right\} \\
&= \max_{c_{T-2}}\left\{\ln c_{T-2} + \beta E_{T-2}\left[V_{T-1}(r_{T-1}(W_{T-2} - c_{T-2}), r_{T-1} \middle| r_{T-2})\right]\right\} \quad (55)
\end{aligned}
$$

(54) を代入すると

$$
\begin{aligned}
V_{T-2}(W_{T-2}, r_{T-2}) &= \max_{c_{T-2}}\{\ln c_{T-2} + \beta E_{T-2}[(1+\beta)\ln W_{T-1} + \\
&\qquad \beta\ln\beta - (1+\beta)\ln(1+\beta) + \beta E_{T-1}\left[\ln r_t \middle| r_{T-1}\right] \left| r_{T-2})\right]\Big\} \quad (56) \\
&= \max_{T-2}\Big\{\ln c_{T-2} + \beta(1+\beta)\ln(W_{T-2} - c_{T-2}) + \beta(1+\beta)E_{T-2}\left[\ln r_{T-1} \middle| r_{T-2}\right] \\
&\qquad + \beta^2\ln\beta - \beta(1+\beta)\ln(1+\beta) + \beta^2 E_{T-2}\left[\ln r_T \middle| r_{T-1}\right]\Big\} \quad (57)
\end{aligned}
$$

但し、繰り返し期待値の法則より、$E_{T-2}\left[E_{T-1}\left[\ln r_T \middle| r_{T-1}\right] \middle| r_{T-2}\right] = E_{T-2}\left[\ln r_T \middle| r_{T-2}\right]$ という関係を用いている。

次に、policy function を求める。Bellman equation の右辺の max operator の中を最大化すると、f.o.c. は

$$
\frac{1}{c_{T-2}} = \frac{\beta(1+\beta)}{W_{T-2} - c_{T-2}} \quad (58)
$$

従って、$T-2$ 期の policy function は

$$
h_{T-2}(W_{T-2}, r_{T-2}) = \frac{1}{1+\beta+\beta^2}W_{T-2} \quad (59)
$$

次に $T-2$ 期の value function を求める。(59) の policy function を (56) に代入すると、max operator が外れて

$$
\begin{aligned}
V_{T-2}(W_{T-2}, r_{T-2}) &= \ln\left(\frac{W_{T-2}}{1+\beta+\beta^2}\right) + \beta(1+\beta)\ln\left(\frac{\beta(1+\beta)W_{T-2}}{1+\beta+\beta^2}\right) + E_{T-2}\left[\ln r_{T-1} \middle| r_{T-2}\right] \\
&\qquad + \beta^2\ln\beta - \beta(1+\beta)\ln(1+\beta) + \beta^2 E_{T-2}\left[\ln r_T \middle| r_{T-2}\right] \quad (60)
\end{aligned}
$$

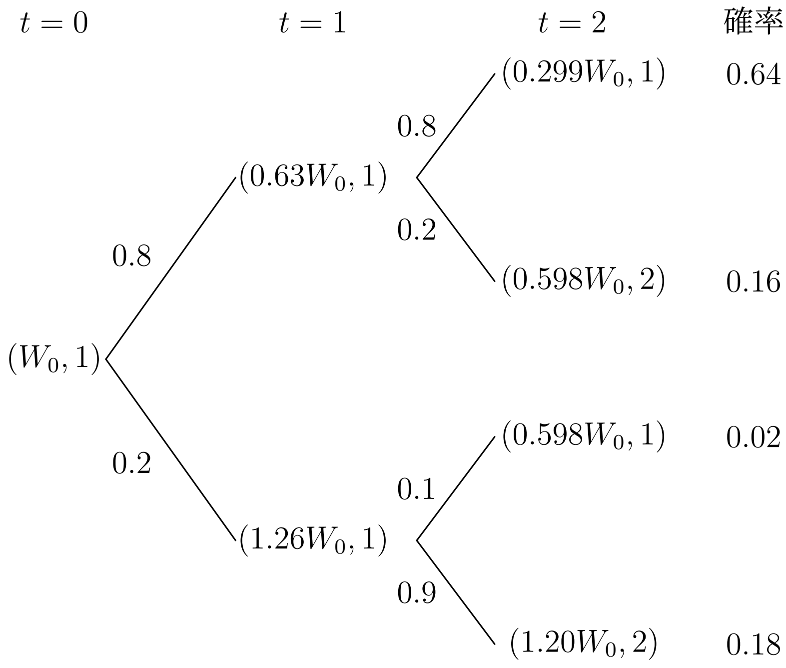

図 1: history

従って、$T-2$ 期の value function は

$$\begin{aligned} V_{T-2}(W_{T-2}, r_{T-2}) &= (1+\beta+\beta^2)\ln W_{T-2} + (\beta+2\beta^2)\ln\beta - (1+\beta+\beta^2)\ln(1+\beta+\beta^2) \\ &\quad + E_{T-2}\left[\beta^2 \ln r_T + (\beta+\beta^2)\ln r_{T-1} \middle| r_{T-2}\right] \end{aligned} \tag{61}$$

と求められる。

(問題 2-3)

(問題 2-1) と (問題 2-2) で求めた policy function より、$T-2$ の時

$$h_0(W_0, r_0) = c_0 = \frac{1}{1+\beta+\beta^2}W_0 \tag{62}$$

$$W_1 = r_1(W_0 - c_0) = \frac{r_1(\beta+\beta^2)}{1+\beta+\beta^2}W_0 = 0.63r_1W_0 \tag{63}$$

$$h_1(W_1, r_1) = c_1 = \frac{1}{1+\beta}W_1 = \frac{r_1\beta}{1+\beta+\beta^2}W_0 \tag{64}$$

$$W_2 = r_2(W_1 - c_1) = r_2\frac{\beta}{1+\beta}W_1 = \frac{r_2r_1\beta^2}{1+\beta+\beta^2}W_0 = r_1r_2 0.299W_0 \tag{65}$$

$$h_2(W_2, r_2) = c_2 = W_2 = \frac{r_2r_1\beta^2}{1+\beta+\beta^2}W_0 \tag{66}$$

ここで、r は 1 もしくは 2 をとるので、$r_0 = 1$ の時のあり得る history と各 path をたどる確率は図 1 の様に表される。

次に、$E[c_t]$ の経路を計算する。図 1 で示されている確率と値を用いると

$$\begin{aligned}
E[c_0] &= c_0 \approx 0.369W_0 && (67)\\
E[c_1] &= 0.8 \times 0.63W_0 + 0.2 \times 1.26W_0 \approx 0.399W_0 && (68)\\
E[c_2] &= (0.8 \times 0.8) \times 0.299W_0 + (0.8 \times 0.2) \times 0.598W_0 \\
&\quad +(0.2 \times 0.1) \times 0.598W_0 + (0.2 \times 0.9) \times 1.20W_0 \\
&\approx 0.514W_0 && (69)
\end{aligned}$$

(問題 2-4)

$T = 2$ とおくと、(61) より value function は

$$\begin{aligned}
V_0(W_0, r_0) &= (1+\beta+\beta^2)\ln W_0 + (\beta+2\beta^2)\ln\beta - (1+\beta+\beta^2)\ln(1+\beta+\beta^2) \\
&\quad E_0\left[\beta^2 \ln r_2 + (\beta+\beta^2)\ln r_1 \middle| r_0\right] && (70)
\end{aligned}$$

である。従って、$r_0 = 1$ の時と $r_0 = 2$ の時の期待効用の差は

$$\begin{aligned}
V_0(W_0, r_0=2) - V_0(W_0, r_0=1) &= \beta^2\left\{E_0\left[\ln r_2 \middle| r_0 = 2\right] - E_0\left[\ln r_2 \middle| r_0 = 1\right]\right\} \\
&\quad +(\beta+\beta^2)\left\{E_0\left[\ln r_1 \middle| r_0 = 2\right] - E_0\left[\ln r_1 \middle| r_0 = 1\right]\right\} && (71)
\end{aligned}$$

ここで、transition matrix より

$$\Pr(r_1 = 2 \big| r_0 = 2) = 0.9, \quad \Pr(r_1 = 2 \big| r_0 = 1) = 0.2 \qquad (72)$$

$$\Pr(r_2 = 2 \big| r_0 = 2) = 0.1 \times 0.2 + 0.9 \times 0.9 = 0.83 \qquad (73)$$

$$\Pr(r_2 = 2 \big| r_0 = 1) = 0.8 \times 0.2 + 0.2 \times 0.9 = 0.34 \qquad (74)$$

$\ln 1 = 0$ であることに注意すると

$$\begin{aligned}
&E_0\left[\ln r_1 \middle| r_0 = 2\right] - E_0\left[\ln r_1 \middle| r_0 = 1\right] = (0.9\ln 2 + 0.1\ln 1) - (0.8\ln 1 + 0.2\ln 2) = 0.7\ln 2 \\
&E_0\left[\ln r_2 \middle| r_0 = 2\right] - E_0\left[\ln r_2 \middle| r_0 = 1\right] = 0.49\ln 2 && (75)
\end{aligned}$$

以上より

$$V_0(W_0, r_0 = 2) - V_0(W_0, r_0 = 1) = \beta^2 0.49\ln 2 + (\beta+\beta^2)0.7\ln 2 \approx 1.1048 \qquad (76)$$

(問題 2-5)

(問題 2-2) と (問題 2-3) で求めた policy function は

$$h_T(W_T, r_T) = W_T \tag{77}$$
$$h_{T-1}(W_{T-1}, r_{T-1}) = \frac{1}{1+\beta}W_{T-1} \tag{78}$$
$$h_{T-2}(W_{T-2}, r_{T-2}) = \frac{1}{1+\beta+\beta^2}W_{T-2} \tag{79}$$

であった。一方、(問題 1-2) と (問題 1-3) で求めた policy function は

$$h_T(W_T, r_T) = W_T \tag{80}$$
$$h_{T-1}(W_{T-1}, r_{T-1}) = \frac{1}{1+\beta}W_{T-1} \tag{81}$$
$$h_{T-2}(W_{T-2}, r_{T-2}) = \frac{1}{1+\beta+\beta^2}W_{T-2} \tag{82}$$

であった。従って、資産の収益率が不確実な場合でも常に利子率がゼロの場合でも、policy function は同一であることが分かる。これは、対数効用関数を仮定すると、消費及び貯蓄が利子率から独立になるという性質に依存している。

従って、無限期問題の policy function が (問題 1-5) で求めたように

$$h(W, r) = h(W) = (1-\beta)W \tag{83}$$

であると予想する。以下では、この予想が正しいことを確認する。

(83) にずっと従った場合の value function を求める。生涯期待効用の定義より、(W_0, r_0) を given にした時の 0 期における value は

$$V_0(W_0, r_0) = E\left[\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t \ln c_t\right] = E\left[\ln c_0 \middle| r_0\right] + E\left[\beta \ln c_1 \middle| r_0\right] + E\left[\beta^2 \ln c_2 \middle| r_0\right] + \cdots \tag{84}$$

である。

まず、(83) にずっと従った時、0 期において

$$c_0 = (1-\beta)W_0 \tag{85}$$
$$E\left[\ln c_0 \middle| r_0\right] = \ln(1-\beta) + \ln W_0 \tag{86}$$

次に、1 期において

$$W_1 = r_1(W_0 - c_0) = r_1\beta W_0, \quad c_1 = (1-\beta)W_1 = r_1\beta(1-\beta)W_0 \tag{87}$$
$$E\left[\beta \ln c_1 \middle| r_0\right] = E_0\left[\beta \ln r_1 \middle| r_0\right] + \beta\ln\beta + \beta\ln(1-\beta) + \beta\ln W_0 \tag{88}$$

更に、2 期において

$$W_2 = r_2(W_1 - c_1) = r_2(r_1\beta W_0 - r_1\beta(1-\beta)W_0) = r_2 r_1\beta^2 W_0 \tag{89}$$
$$c_2 = (1-\beta)W_2 = r_2 r_1 \beta^2(1-\beta)W_0 \tag{90}$$
$$E\left[\beta^2 \ln c_2 \middle| r_0\right] = E_0\left[\beta^2 \ln r_2 + \beta^2 \ln r_1 \middle| r_0\right] + 2\beta^2\ln\beta + \beta^2\ln(1-\beta) + \beta^2\ln W_0 \tag{91}$$

ここで、$W_{t+1} = r_{t+1}W_t$ になっていることに注意すると、任意の t 期について

$$W_t = r_t \beta W_{t-1} = r_t r_{t-1} \beta^2 W_{t-2} = \cdots = (r_t r_{t-1} \cdots r_1)\beta^t W_0 \tag{92}$$

$$c_t = (1-\beta)W_t = (r_t r_{t-1} \cdots r_1)\beta^t (1-\beta) W_0 \tag{93}$$

$$E_0\left[\beta^t \ln c_t \middle| r_0\right] = E_0\left[\beta^t \sum_{i=1}^{t} \ln r_i \middle| r_0\right] + \beta^t \ln(1-\beta) + \beta^t \ln W_0 + t\beta^t \ln\beta \tag{94}$$

が成立する。これを (84) に代入すると

$$\begin{aligned} V_0(W_0, r_0) \;\; = \;\; & E_0\left[\sum_{j=1}^{\infty} \beta^j \sum_{i=1}^{j} \ln r_i \middle| r_0\right] + \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i \ln(1-\beta) \\ & \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i \ln W_0 + \sum_{i=0}^{\infty} i\beta^i \ln\beta \end{aligned} \tag{95}$$

ここで、無限期問題においてはモデルの stationarity より、value function の関数形は時間を通じて一定になる。よって上式を計算すると、任意の t 期における value function は

$$V_t(W_t, r_t) = E_t\left[\sum_{j=1}^{\infty} \beta^j \sum_{i=1}^{j} \ln r_i \middle| r_t\right] + \frac{1}{1-\beta}\ln(1-\beta) + \frac{1}{1-\beta}\ln W_t + \frac{\beta}{(1-\beta)^2}\ln\beta \tag{96}$$

であると予想される。

次に、予想された value function を Bellman equation に代入して Bellman equation から value function を解きなおし、それが予想した value function と一致していることを確認する。以下では議論を進めやすくする為に time-index をつけることにする。任意の t 期における Bellman equation は

$$V(W_t, r_t) = \max_{c_t}\left\{u(c_t) + \beta E_t\left[V(W_{t+1}, r_{t+1}) \middle| r_t\right]\right\} \tag{97}$$

(84) より

$$V(W_{t+1}, r_{t+1}) = E_{t+1}\left[\sum_{j=1}^{\infty} \beta^j \sum_{i=1}^{j} \ln r_i \middle| r_{t+1}\right] + \frac{1}{1-\beta}\ln(1-\beta) + \frac{1}{1-\beta}\ln W_{t+1} + \frac{\beta}{(1-\beta)^2}\ln\beta \tag{98}$$

なので、これを Bellman equation に代入すると

$$\begin{aligned} V(W_t, r_t) \;\; = \;\; & \max_{c_t}\Bigg\{\ln c_t + \beta E_t\Bigg[E_{t+1}\left[\sum_{j=1}^{\infty} \beta^j \sum_{i=1}^{j} \ln r_{t+1+i} \middle| r_{t+1}\right] \\ & +\frac{1}{1-\beta}\ln(1-\beta) + \frac{1}{1-\beta}\ln r_{t+1} + \frac{1}{1-\beta}\ln(W_t - c_t) + \frac{\beta}{(1-\beta)^2}\ln\beta \Bigg| r_t\Bigg]\Bigg\} \\ = \;\; & \max_{c_t}\Bigg\{\ln c_t + \beta E_t\left[\sum_{j=1}^{\infty} \beta^j \sum_{i=1}^{j} \ln r_{t+1+i} \middle| r_t\right] + \frac{\beta}{1-\beta}\ln(1-\beta) + \frac{\beta}{1-\beta}E_t\left[\ln r_{t+1} \middle| r_t\right] \\ & +\frac{\beta}{1-\beta}\ln(W_t - c_t) + \frac{\beta^2}{(1-\beta)^2}\ln\beta\Bigg\} \end{aligned} \tag{99}$$

但し、繰り返し期待値の法則より

$$E_t\left[E_{t+1}\left[\sum_{j=1}^{\infty}\beta^j\sum_{i=1}^{j}\ln r_{t+1+i}\middle|r_{t+1}\right]\middle|r_t\right]=E_t\left[\sum_{j=1}^{\infty}\beta^j\sum_{i=1}^{j}\ln r_{t+1+i}\middle|r_t\right] \tag{100}$$

という関係を用いている。

Bellman equation の右辺の最大化より、f.o.c. は

$$\frac{1}{c_t}=\frac{\beta}{1-\beta}\frac{1}{W_t-c_t} \tag{101}$$

従って、policy function は

$$h(W_t)=(1-\beta)W_t \tag{102}$$

である。これは、最初に予想した policy function と一致している。

次に、policy function を (99) の Bellman equation に代入すると、任意の t 期における value function は

$$\begin{aligned}
V(W_t,r_t) &= \ln\{(1-\beta)W_t\}+\beta E_t\left[\sum_{j=1}^{\infty}\beta^j\sum_{i=1}^{j}\ln r_{t+1+i}\middle|r_t\right]+\frac{\beta}{1-\beta}\ln(1-\beta)\\
&\quad+\frac{\beta}{1-\beta}E_t\left[\ln r_{t+1}\middle|r_t\right]+\frac{\beta}{1-\beta}\ln(\beta W_t)+\frac{\beta^2}{(1-\beta)^2}\ln\beta\\
&= \frac{1}{1-\beta}\ln W_t+\frac{\beta}{(1-\beta)^2}\ln\beta+\frac{1}{1-\beta}\ln(1-\beta)\\
&\quad+\beta E_t\left[\sum_{j=1}^{\infty}\beta^j\sum_{i=1}^{j}\ln r_{t+1+i}\middle|r_t\right]+\frac{\beta}{1-\beta}E_t\left[\ln r_{t+1}\middle|r_t\right]
\end{aligned} \tag{103}$$

ここで、

$$\beta E_t\left[\sum_{j=1}^{\infty}\beta^j\sum_{i=1}^{j}\ln r_{t+1+i}\middle|r_t\right]=E_t\left[\sum_{j=2}^{\infty}\beta^j\sum_{i=2}^{j}\ln r_{t+i}\middle|r_t\right] \tag{104}$$

$$\frac{\beta}{1-\beta}E_t\left[\ln r_{t+1}\middle|r_t\right]=E_t\left[\frac{\beta}{1-\beta}\ln r_{t+1}\middle|r_t\right]=E_t\left[\sum_{j=1}^{\infty}\beta^j\ln r_{t+1}\middle|r_t\right] \tag{105}$$

従って、

$$\begin{aligned}
\beta E_t\left[\sum_{j=1}^{\infty}\beta^j\sum_{i=1}^{j}\ln r_{t+1+i}\middle|r_t\right]+\frac{\beta}{1-\beta}E_t\left[\ln r_{t+1}\middle|r_t\right] &= E_t\left[\sum_{j=2}^{\infty}\beta^j\sum_{i=2}^{j}\ln r_{t+i}\middle|r_t\right]+E_t\left[\sum_{j=1}^{\infty}\beta^j\ln r_{t+1}\middle|r_t\right]\\
&= E_t\left[\sum_{j=1}^{\infty}\beta^j\sum_{i=1}^{j}\ln r_{t+i}\middle|r_t\right]
\end{aligned} \tag{106}$$

である。従って、任意の t 期における value function は

$$V(W_t,r_t)=\frac{1}{1-\beta}\ln W_t+\frac{\beta}{(1-\beta)^2}\ln\beta+\frac{1}{1-\beta}\ln(1-\beta)+E_t\left[\sum_{j=1}^{\infty}\beta^j\sum_{i=1}^{j}\ln r_{t+i}\middle|r_t\right] \tag{107}$$

である。これは (96) で予想された value function と一致している。従って、最初の policy function の予想は正しかったと結論付けられる。

(問題 2-6)

(問題 2-5) で求めた、無限期問題の policy function より

$$c_t = (1-\beta)W_t \;\Rightarrow\; W_{t+1} = r_{t+1}(W_t - c_t) = r_{t+1}\beta W_t \tag{108}$$

従って、

$$c_{t+1} = (1-\beta)W_{t+1} = \beta r_{t+1} c_t \tag{109}$$

が成立する。両辺に条件付期待値をとると

$$E_t\left[c_{t+1}\middle|r_t\right] = \beta c_t E_t\left[r_{t+1}\middle|r_t\right] \;\Rightarrow\; E_t\left[\frac{c_{t+1}}{c_t}\middle|r_t\right] = \beta E_t\left[r_{t+1}\middle|r_t\right] \tag{110}$$

従って、

$$E_t\left[g_{t+1}\middle|r_t\right] = \beta E_t\left[r_{t+1}\middle|r_t\right] - 1 \tag{111}$$

と求まる。ここで、条件無しの期待値を求めるために、上式の両辺に非条件付期待値をとると

$$E\left[E_t\left[g_{t+1}\middle|r_t\right]\right] = E\left[\beta E_t\left[r_{t+1}\middle|r_t\right] - 1\right] \tag{112}$$

繰り返し期待値の法則より $E\left[E_t\left[g_{t+1}\middle|r_t\right]\right] = E\left[g_{t+1}\right]$、$E\left[E_t\left[r_{t+1}\middle|r_t\right]\right] = E\left[r_{t+1}\right]$ なので

$$E\left[g_{t+1}\right] = \beta E\left[r_{t+1}\right] - 1 \tag{113}$$

という関係が求まる。ここで、transition matrix の要素は全て starict に正なので、r_t の確率過程は漸近的安定性を持ち、unique な定常分布を持つことに注意する。r_t の定常状態における分布を $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \pi_2)'$ と定義すると、

$$\boldsymbol{\pi}' = \boldsymbol{\pi}'\mathbf{P}' \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{\pi} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix} \tag{114}$$

以上より

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} E\left[g_{t+1}\right] &= \beta \lim_{t\to\infty} E\left[r_{t+1}\right] - 1 \\ &= \beta(\pi_1 \times 1 + \pi_2 \times 2) - 1 \\ &= \frac{5}{3}\beta - 1 \end{aligned} \tag{115}$$

従って、$\beta = 0.9$ の時

$$\lim_{t\to\infty} E\left[g_{t+1}\right] = 0.5 \tag{116}$$

である。