マクロ経済II第二回宿題解答[†]

TA：荒渡良[‡]

平成17年11月3日

問題1

(問題1-1)

確率過程 $z_{t+1} = a + bz_{t-3} + cw_{t+1}$ の linear state-space system は以下の様に表される。

$$\begin{bmatrix} z_{t+1} \\ z_t \\ z_{t-1} \\ z_{t-2} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & b & a \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_t \\ z_{t-1} \\ z_{t-2} \\ z_{t-3} \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} w_{t+1} \tag{1}$$

$$z_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_t \\ z_{t-1} \\ z_{t-2} \\ z_{t-3} \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

ここで、

$$\mathbf{x}_t = [z_t, z_{t-1}, z_{t-2}, z_{t-3}, 1]', \quad \mathbf{C} = [1, 0, 0, 0, 0] \tag{3}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & b & a \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4}$$

とおくと、上記の linear state-space system は

$$\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_t + \mathbf{B}w_{t+1} \tag{5}$$

$$z_t = \mathbf{C}\mathbf{x}_t \tag{6}$$

[†]解答の作成にあたっては、経済学研究科D1の川元康一氏に協力して頂いた。

[‡]E-mail address:ege001ar@mail2.econ.osaka-u.ac.jp

のように、Marcov process となる。

(問題 1-2)

確率過程 $z_{t+1} = a + bz_t + cz_{t-1} + dw_{t+1} + ew_t$ の linear state-space system は以下の様に表される。

$$\begin{bmatrix} z_{t+1} \\ z_t \\ w_{t+1} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & c & e & a \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_t \\ z_{t-1} \\ w_t \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} w_{t+1} \tag{7}$$

$$z_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_t \\ z_{t-1} \\ w_t \\ 1 \end{bmatrix} \tag{8}$$

ここで、

$$\mathbf{x}_t = [z_t, z_{t-1}, w_t, 1]', \quad \mathbf{C} = [1, 0, 0, 0] \tag{9}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} b & c & e & a \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} d \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{10}$$

とおくと、上記の linear state-space system は

$$\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_t + \mathbf{B}w_{t+1} \tag{11}$$

$$z_t = \mathbf{C}\mathbf{x}_t \tag{12}$$

のように、Marcov process となる。

問題 2

確率線形差分方程式

$$\begin{bmatrix} z_{t+1} \\ u_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/4 \\ -1/2 & 3/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_t \\ u_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} w_{t+1} \tag{13}$$

について考える。但し、確率変数 w_{t+1} はテキスト p.40、A.3 の仮定

$$E[w_{t+1}] = 0 \forall\ t \tag{14}$$

$$Cov[w_t, w_{t-j}] = E[(w_t - E[w_t])(w_{t-j} - E[w_{t-j}])'] = E[w_t w_{t-j}'] = \begin{cases} \mathbf{I}, \text{if } j = 0; \\ 0, \text{if } j \neq 0. \end{cases} \tag{15}$$

を満たすとする。また、以下では

$$\mathbf{x}_t = [z_t, u_t]', \quad \mathbf{B} = [2, 4]' \tag{16}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1/4 \\ -1/2 & 3/4 \end{bmatrix} \tag{17}$$

と表す。この時、上記の linear state-space system は

$$\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_t + \mathbf{B}w_{t+1} \tag{18}$$

と表される。

(問題 2-1)

まず、期待値を求める。(18) 式の両辺に期待値を取ると

$$E[\mathbf{x}_{t+1}] = \mathbf{A}E[\mathbf{x}_t] + \mathbf{B}E[w_{t+1}] \tag{19}$$

この時 (14) 式の仮定より、$E[w_{t+1}] = 0$。よって $E[\mathbf{x}_t] = \boldsymbol{\mu}_t$ と表すと、次式が成立する。

$$\boldsymbol{\mu}_{t+1} = \mathbf{A}\boldsymbol{\mu}_t \tag{20}$$

従って、$\boldsymbol{\mu}_0 = E[[z_0, u_0]'] = [z_0, u_0]' = [1, 2]'$ より

$$E\begin{bmatrix} z_2 \\ u_2 \end{bmatrix} = E[\mathbf{x}_2] = \boldsymbol{\mu}_2 = \mathbf{A}^2\boldsymbol{\mu}_0 = \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.5 \end{bmatrix} \tag{21}$$

次に、共分散行列を求める。任意の $t \geq 0$ 期における共分散行列は

$$\begin{aligned}
Cov[\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_t] &= E[(\mathbf{x}_t - \boldsymbol{\mu}_t)(\boldsymbol{x}_t - \boldsymbol{\mu}_t)'] \\
&= E[(\mathbf{A}(\mathbf{x}_{t-1} - \boldsymbol{\mu}_{t-1}) + \mathbf{B}w_t)(\mathbf{A}(\mathbf{x}_{t-1} - \boldsymbol{\mu}_{t-1}) + \mathbf{B}w_t)'] \\
&= E[\mathbf{A}(\mathbf{x}_{t-1} - \boldsymbol{\mu}_{t-1})(\mathbf{x}_{t-1} - \boldsymbol{\mu}_{t-1})'\mathbf{A}'] + E[\mathbf{B}w_t(\mathbf{x}_{t-1} - \boldsymbol{\mu}_{t-1})'\mathbf{A}'] \\
&\quad + E[\mathbf{A}(\mathbf{x}_{t-1} - \boldsymbol{\mu}_{t-1})w_t'\mathbf{B}'] + E[\mathbf{B}w_t w_t'\mathbf{B}'] \\
&= \mathbf{A}E[(\mathbf{x}_{t-1} - \boldsymbol{\mu}_{t-1})(\mathbf{x}_{t-1} - \boldsymbol{\mu}_{t-1})']\mathbf{A}' + \mathbf{B}E[w_t]E[(\mathbf{x}_{t-1} - \boldsymbol{\mu}_{t-1})']\mathbf{A}' \\
&\quad + \mathbf{A}E[(\mathbf{x}_{t-1} - \boldsymbol{\mu}_{t-1})]E[w_t']\mathbf{B}' + \mathbf{B}E[w_t w_t']\mathbf{B}' \\
&= \mathbf{A}E[(\mathbf{x}_{t-1} - \boldsymbol{\mu}_{t-1})(\mathbf{x}_{t-1} - \boldsymbol{\mu}_{t-1})']\mathbf{A}' + \mathbf{B}\mathbf{B}'
\end{aligned} \tag{22}$$

但し、上記の計算では $E[w_t] = E[w_t'] = 0$、$E[w_t w_t'] = I$ という関係を用いている。ここで共分散行列の定義より $Cov[\mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{x}_{t-1}] = E[(\mathbf{x}_{t-1} - \boldsymbol{\mu}_{t-1})(\mathbf{x}_{t-1} - \boldsymbol{\mu}_{t-1})']$ なので、(22) 式より次式が成立する。

$$Cov[\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_t] = \mathbf{A}Cov[\mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{x}_{t-1}]\mathbf{A}' + \mathbf{B}\mathbf{B}' \tag{23}$$

ここで、$\mathbf{x}_0$ は given の定数ベクトルなので $Cov[\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0]$ はゼロ行列。従って、

$$\begin{aligned} Cov[\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2] &= \mathbf{A}Cov[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1]\mathbf{A}' + \mathbf{B}\mathbf{B}' && (24) \\ &= \mathbf{A}\left\{\mathbf{A}Cov[\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0]\mathbf{A}' + \mathbf{B}\mathbf{B}'\right\}\mathbf{A}' + \mathbf{B}\mathbf{B}' && (25) \\ &= \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{B}'\mathbf{A}' + \mathbf{B}\mathbf{B}' && (26) \\ &= \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 20 \end{bmatrix} && (27) \end{aligned}$$

(問題 2-2)

まず、定常状態における平均ベクトルを求める。定常状態における平均ベクトルを $\boldsymbol{\mu} = [\mu_1, \mu_2]$ とおくと、(20) 式より

$$\boldsymbol{\mu} = \mathbf{A}\boldsymbol{\mu} \;\Leftrightarrow\; (\mathbf{I} - \mathbf{A})\boldsymbol{\mu} = 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{bmatrix} 1 & -1/4 \\ 1/2 & 1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{28}$$

が成立する。従って (28) 式の連立方程式を解くと、定常状態における平均ベクトルは

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{29}$$

と求まる[1]。

次に、定常状態における共分散行列を求める。定常状態における共分散行列を

$$Cov[\mathbf{x}, \mathbf{x}] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \tag{30}$$

と定義すると、(23) 式より

$$\begin{aligned} & Cov[\mathbf{x}, \mathbf{x}] = \mathbf{A}Cov[\mathbf{x}, \mathbf{x}]\mathbf{A}' + \mathbf{B}\mathbf{B}' \\ \Leftrightarrow\; & \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 + \frac{1}{16}c_{22} & 8 - \frac{1}{8}c_{21} + \frac{3}{16}c_{22} \\ 8 - \frac{1}{8}c_{12} + \frac{3}{16}c_{22} & 16 + \frac{1}{4}c_{11} - \frac{3}{8}c_{12} - \frac{3}{8}c_{21} + \frac{9}{16}c_{22} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{31}$$

上記の 4 元連立方程式を解くと、定常状態における共分散行列は以下の様に求められる。

$$Cov[\mathbf{x}, \mathbf{x}] = \begin{bmatrix} 5.3333 & 10.6667 \\ 10.6667 & 21.3333 \end{bmatrix} \tag{32}$$

(問題 2-3)

共分散の定義より

$$Cov[\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t+1}] = E[(\mathbf{x}_t - \boldsymbol{\mu}_t)(\mathbf{x}_t - \boldsymbol{\mu}_t)'] \tag{33}$$

[1]定常状態における平均ベクトルは、係数行列 $\mathbf{A}$ の固有値 1 に対する固有ベクトルとなる。ここでは係数行列 $\mathbf{A}$ は 1 の固有値を持たないので、ゼロベクトルが定常状態における平均ベクトルになる。

ここで、今は定常状態を考えているので $\boldsymbol{\mu}_t = \boldsymbol{\mu}_{t+1} = \boldsymbol{\mu}$ かつ $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{A}\boldsymbol{\mu}$ である。従って、

$$\begin{aligned} Cov[\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t+1}] &= E[(\mathbf{x}_t - \boldsymbol{\mu}_t)(\mathbf{x}_{t+1} - \boldsymbol{\mu}_{t+1})^{'}] \\ &= E[(\mathbf{x}_t - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{A}(\mathbf{x}_t - \boldsymbol{\mu}) + \mathbf{B}w_{t+1})^{'}] \\ &= E[(\mathbf{x}_t - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{x}_t - \boldsymbol{\mu})^{'}\mathbf{A}^{'}] + E[(\mathbf{x}_t - \boldsymbol{\mu})w_{t+1}^{'}\mathbf{B}^{'}] \\ &= E[(\mathbf{x}_t - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{x}_t - \boldsymbol{\mu})^{'}]\mathbf{A}^{'} + E[(\mathbf{x}_t - \boldsymbol{\mu})]E[w_{t+1}^{'}]\mathbf{B}^{'} \\ &= Cov[\mathbf{x}, \mathbf{x}]\mathbf{A}^{'} \end{aligned} \tag{34}$$

従って、定常状態においては

$$Cov[\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t+1}] = Cov[\mathbf{x}, \mathbf{x}]\mathbf{A}^{'} = \begin{bmatrix} 2.6667 & 5.3333 \\ 5.3333 & 10.6667 \end{bmatrix} \tag{35}$$

問題 3

確率線形差分方程式

$$\begin{bmatrix} 1 \\ z_{t+1} \\ u_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 7/4 & 0 & 1/4 \\ 11/4 & -1/2 & 3/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ z_t \\ u_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} w_{t+1} \tag{36}$$

について考える。但し、確率変数 w_{t+1} はテキスト p.40、A.3 の仮定

$$E[w_{t+1}] = 0 \forall\ t \tag{37}$$

$$Cov[w_t, w_{t-j}] = E[(w_t - E[w_t])(w_{t-j} - E[w_{t-j}])^{'}] = E[w_t w_{t-j}^{'}] = \begin{cases} \mathbf{I}, \text{if } j = 0; \\ 0, \text{if } j \neq 0. \end{cases} \tag{38}$$

を満たすとする。また、以下では

$$\mathbf{x}_t = [1, z_t, u_t]^{'}, \quad \mathbf{B} = [0, 2, 4]^{'} \tag{39}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 7/4 & 0 & 1/4 \\ 11/4 & -1/2 & 3/4 \end{bmatrix} \tag{40}$$

と表す。この時、上記の linear state-space system は

$$\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_t + \mathbf{B}w_{t+1} \tag{41}$$

と表される。

(問題 3-1)

(20) 式と $\boldsymbol{\mu}_0 = E[[1, z_0, u_0]'] = [1, z_0, u_0]' = [1, 1, 2]'$ より

$$E\begin{bmatrix}1\\z_2\\u_2\end{bmatrix} = E[\mathbf{x}_2] = \boldsymbol{\mu}_2 = \mathbf{A}^2\boldsymbol{\mu}_0 = \begin{bmatrix}1\\2.6875\\4.4375\end{bmatrix} \tag{42}$$

また、(23) 式より

$$\begin{aligned} Cov[\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2] &= \mathbf{A}Cov[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1]\mathbf{A}' + \mathbf{B}\mathbf{B}' & (43)\\ &= \mathbf{A}\left\{\mathbf{A}Cov[\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0]\mathbf{A}' + \mathbf{B}\mathbf{B}'\right\}\mathbf{A}' + \mathbf{B}\mathbf{B}' & (44)\\ &= \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{B}'\mathbf{A}' + \mathbf{B}\mathbf{B}' & (45)\end{aligned}$$

ここで、問題 3 の state vector$\mathbf{x}_t$ は問題 2 の state vector に定数項 1 を加えたものであることに注意する。いま、x_t を確率変数、a を定数項とすると、

$$Cov[x_t, a] = E[(x_t - E[x_t])(a - E[a])] = E[(x_t - E[x_t]) \times 0] = 0 \tag{46}$$

となるので、確率変数と定数項の共分散は必ずゼロ。従って、1 と確率変数の共分散が入る第 1 行要素と第 1 列要素は全てゼロとなる。また、その他の要素は問題 2 と全く同じ連立方程式を解くことで求められるので、

$$Cov[\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2] = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 5 & 10\\0 & 10 & 20\end{bmatrix} \tag{47}$$

と求められる。

(問題 3-2)

まず、平均ベクトルについて考える。定常状態における平均ベクトルを $\boldsymbol{\mu} = [\mu_1, \mu_2, \mu_3]'$ とおくと

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A})\boldsymbol{\mu} = 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ -\frac{7}{4} & 1 & -\frac{1}{4}\\ -\frac{11}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mu_1\\\mu_2\\\mu_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \tag{48}$$

上記の 3 元連立方程式を解くと、$\mu_2 = 3\mu_1$、$\mu_3 = 5\mu_1$ と求まる。また、μ_1 は定数項 1 の定常状態における平均なので、$\mu_1 = 1$。従って、

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix}1\\3\\5\end{bmatrix} \tag{49}$$

と求まる。

次に、共分散行列について考える。(問題 3-1) と同様に、共分散行列の第 1 行要素と第 1 列要素は全てゼロとなり、その他の要素は (問題 3-2) と全く同様になるので、定常状態における共分散行列は

$$Cov[\mathbf{x},\mathbf{x}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5.3333 & 10.6667 \\ 0 & 10.6667 & 21.3333 \end{bmatrix} \tag{50}$$

と求められる。

(問題 3-3)

(問題 2-3) と同様に

$$\begin{aligned} Cov[\mathbf{x}_t,\mathbf{x}_{t+1}] &= Cov[\mathbf{x},\mathbf{x}]\mathbf{A}' \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2.6667 & 5.3333 \\ 0 & 5.3333 & 10.6667 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{51}$$

と求まる。