マクロ経済II第一回宿題解答[†]

TA：荒渡良[‡]

平成17年10月27日

問題1

この問題を通じて、Transition matrix

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{bmatrix} \tag{1}$$

の第 (i, j) 要素 P_{ij} は、state i から state j への遷移確率を表すとする。

(問題1-1)

遷移図は以下のように表される。

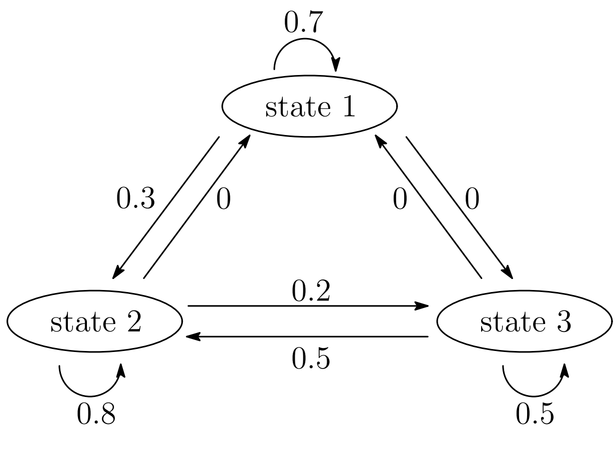

図1: 遷移図

(問題1-2)

第2期までの Tree は以下のように表される。

[†]解答の作成にあたっては、経済学研究科 D1 の川元康一氏に協力して頂いた。

[‡]E-mail address:ege001ar@mail2.econ.osaka-u.ac.jp

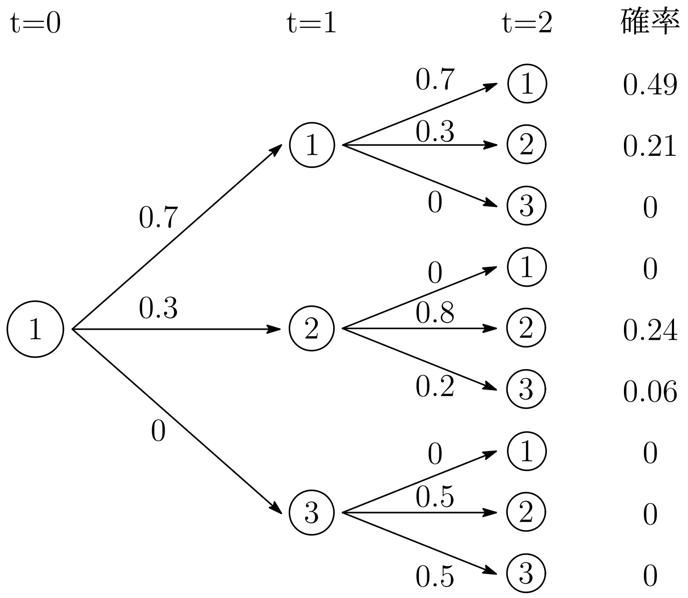

図 2: Tree

(問題 1-3)

t 期における state1、state2、state3 をそれぞれ $\mathbf{x}_t = \mathbf{e}_1 = [1,0,0]'$、$\mathbf{x}_t = \mathbf{e}_2 = [0,1,0]'$、$\mathbf{x}_t = \mathbf{e}_3 = [0,0,1]'$ と表す。この時、t 期における unconditional な確率分布 $\boldsymbol{\pi}_t = [\pi_{t,1}, \pi_{t,2}, \pi_{t,3}]'$ は

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\pi}_t' = \begin{bmatrix} \Pr(\mathbf{x}_t = \mathbf{e}_1) \\ \Pr(\mathbf{x}_t = \mathbf{e}_2) \\ \Pr(\mathbf{x}_t = \mathbf{e}_3) \end{bmatrix}' &= \begin{bmatrix} \pi_{t-1,1}P_{11} + \pi_{t-1,2}P_{21} + \pi_{t-1,3}P_{31} \\ \pi_{t-1,1}P_{12} + \pi_{t-1,2}P_{22} + \pi_{t-1,3}P_{32} \\ \pi_{t-1,1}P_{13} + \pi_{t-1,2}P_{23} + \pi_{t-1,3}P_{33} \end{bmatrix}' \\
&= [\pi_{t-1,1}, \pi_{t-1,2}, \pi_{t-1,3}] \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{bmatrix} = \boldsymbol{\pi}_{t-1}'\mathbf{P} \qquad (2)
\end{aligned}
$$

$\mathbf{x}_0 = \mathbf{e}_0 = [1,0,0]'$ より $\boldsymbol{\pi}_0 = [1,0,0]'$ なので

$$
\boldsymbol{\pi}_3' = \boldsymbol{\pi}_2'\mathbf{P} = \boldsymbol{\pi}_1'\mathbf{P}^2 = \boldsymbol{\pi}_0'\mathbf{P}^3 = [0.343, 0.537, 0.12] \Leftrightarrow \boldsymbol{\pi}_3 = \begin{bmatrix} 0.343 \\ 0.537 \\ 0.12 \end{bmatrix} \qquad (3)
$$

(問題 1-4)

まず、state ベクトル $\mathbf{x}_t$ について以下のような関係が成立する。

$$
\begin{aligned}
E(\mathbf{x}_t) &= \Pr(\mathbf{x}_t = \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1 + \Pr(\mathbf{x}_t = \mathbf{e}_2)\mathbf{e}_2 + \Pr(\mathbf{x}_t = \mathbf{e}_3)\mathbf{e}_3 \\
&= \Pr(\mathbf{x}_t = \mathbf{e}_1)\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + \Pr(\mathbf{x}_t = \mathbf{e}_2)\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + \Pr(\mathbf{x}_t = \mathbf{e}_3)\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix}\Pr(\mathbf{x}_t = \mathbf{e}_1)\\ \Pr(\mathbf{x}_t = \mathbf{e}_2)\\ \Pr(\mathbf{x}_t = \mathbf{e}_3)\end{bmatrix} = \pi_t
\end{aligned}
\tag{4}
$$

従って、t 期における確率変数 $\mathbf{y}_t$ の期待値は

$$
E(\mathbf{y}_t) = E(\bar{\mathbf{y}}^{'}\mathbf{x}_t) = \bar{\mathbf{y}}^{'}E(\mathbf{x}_t) = \bar{\mathbf{y}}^{'}\boldsymbol{\pi}_t \tag{5}
$$

$E(\mathbf{y}_t)$ はスカラーなので、(5) 式の両辺を転置すると次式が成立する。

$$
E(\mathbf{y}_t) = \boldsymbol{\pi}_t^{'}\bar{\mathbf{y}} = (\boldsymbol{\pi}_0^{'}\mathbf{P}^t)\bar{\mathbf{y}} \tag{6}
$$

従って、

$$
E(\mathbf{y}_1) = (\boldsymbol{\pi}_0^{'}\mathbf{P})\bar{\mathbf{y}} = 13,\ E(\mathbf{y}_2) = (\boldsymbol{\pi}_0^{'}\mathbf{P}^2)\bar{\mathbf{y}} = 15.7,\ E(\mathbf{y}_3) = (\boldsymbol{\pi}_0^{'}\mathbf{P}^3)\bar{\mathbf{y}} = 17.77 \tag{7}
$$

(問題 1-5)

$$
\begin{aligned}
E[f(y_t)] &= E[y_t^2] \\
&= \Pr(\mathbf{x}_t = \mathbf{e}_1)(\bar{\mathbf{y}}^{'}\mathbf{e}_1)^2 + \Pr(\mathbf{x}_t = \mathbf{e}_2)(\bar{\mathbf{y}}^{'}\mathbf{e}_2)^2 + \Pr(\mathbf{x}_t = \mathbf{e}_3)(\bar{\mathbf{y}}^{'}\mathbf{e}_3)^2 \\
&= \Pr(\mathbf{x}_t = \mathbf{e}_1) \times 100 + \Pr(\mathbf{x}_t = \mathbf{e}_2) \times 400 + \Pr(\mathbf{x}_t = \mathbf{e}_3) \times 900 \\
&= \boldsymbol{\pi}_t^{'}\begin{bmatrix}100\\400\\900\end{bmatrix} = (\boldsymbol{\pi}_0^{'}\mathbf{P}^t)\begin{bmatrix}100\\400\\900\end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{8}
$$

従って、

$$
E[f(y_1)] = 190,\ E[f(y_2)] = 283,\ E[f(y_3)] = 357.1 \tag{9}
$$

(問題 1-6)

以下では $\boldsymbol{\pi} = [\pi_1, \pi_2, \pi_3]^{'}$ を定常分布とする。(問題 1-3) で示したように、任意の t 期において $\boldsymbol{\pi}_t^{'}$=$\boldsymbol{\pi}_{t-1}^{'}\mathbf{P}$ が成立するので、$\boldsymbol{\pi}$ が定常分布の時、

$$
\boldsymbol{\pi}^{'} = \boldsymbol{\pi}^{'}\mathbf{P} \ \Leftrightarrow\ (\mathbf{I} - \mathbf{P}^{'})\boldsymbol{\pi} = 0 \ \Leftrightarrow\ \begin{bmatrix}0.3 & 0 & 0\\ -0.3 & 0.2 & -0.5\\ 0 & -0.2 & 0.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\pi_1\\ \pi_2\\ \pi_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \tag{10}
$$

が成立する。但し、$\mathbf{I}$ は 3 行 3 列の単位行列である。上記の 3 元連立方程式と $\pi_1+\pi_2+\pi_3=1$ という関係を用いると、定常分布は以下の様に求められる[1]。

$$\boldsymbol{\pi}=\begin{bmatrix}0\\5/7\\2/7\end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix}0\\0.7143\\0.2857\end{bmatrix} \tag{11}$$

問題 2

(問題 2-1)

定常分布を $\boldsymbol{\pi}=[\pi_1,\pi_2,\pi_3]'$ とおくと

$$(\mathbf{I}-\mathbf{P}')\boldsymbol{\pi}=0 \;\Leftrightarrow\; \begin{bmatrix}0&-0.2&0\\0&0.3&0\\0&0.1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\pi_1\\\pi_2\\\pi_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \;\Leftrightarrow\; \pi_2\begin{bmatrix}-0.2\\0.3\\0.1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \tag{12}$$

従って、$\pi_2=0$ かつ $\pi_1+\pi_2+\pi_3=1$ を満たす全てのベクトルが定常分布となる。以上より任意の実数 $\alpha\in[0,1]$ について

$$\boldsymbol{\pi}=\alpha\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+(1-\alpha)\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \tag{13}$$

が定常分布である。

(問題 2-2)

まず、遷移図は以下の様に表される。

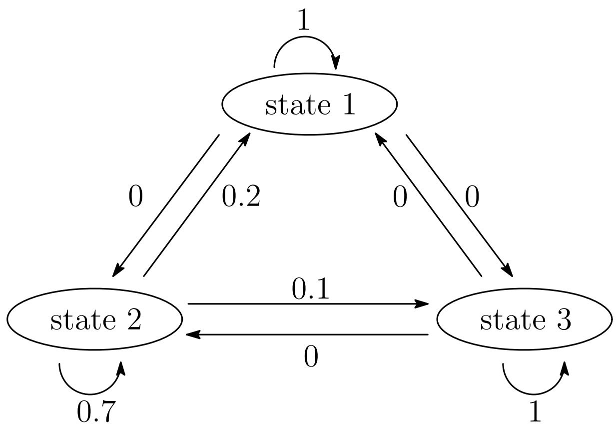

図 3: 遷移図

[1](10) 式より、定常分布は transition matrix の転置行列 $\mathbf{P}'$ の固有値 1 に対応する固有ベクトルと一致することが分かる。

以下では定常分布を $\boldsymbol{\pi} = [\pi_1, \pi_2, \pi_3]'$ と表す。まず、state 1 と state 3 は absorbing state である。従って、一度 state 2 もしくは state 3 に遷移すると再び state 2 に遷移することはないので、$\pi_2 = 0$ であると結論付けられる。

次に、現在の state が state 2 であり、次期には state 2 以外の state に遷移することを条件とすると、$\frac{2}{3}$ の確率で state 1 に、$\frac{1}{3}$ の確率で state 3 に遷移することが分かる。従って、初期の state が state 2 にあるという条件下では、無限期先に state 1 にいる確率と state 3 にいる確率の比は 2 : 1 になっている筈である。

最後に、無限期先に state i,(i=1,3) にいる確率は、初期 state が state i である確率と初期 state が state 2 で、そこから遷移する確率の和なので

$$\pi_1 = 0.2 + 0.5 \times \frac{2}{3} \approx 0.5333 \tag{14}$$

$$\pi_3 = 0.3 + 0.5 \times \frac{1}{3} \approx 0.4667 \tag{15}$$

である。以上より

$$\boldsymbol{\pi} = \begin{bmatrix} 8/15 \\ 0 \\ 7/15 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.5333 \\ 0 \\ 0.4667 \end{bmatrix} \tag{16}$$

が定常分布である。

(問題 2-3)

確率分布を $\boldsymbol{\pi}_t = [\pi_{1,t}, \pi_{2,t}, \pi_{3,t}]'$ と表すと、$t \geq 1$ について各 state が実現する確率は以下の様に計算される。

$$\pi_{2,t} = 0.7\pi_{2,t-1} \;\Rightarrow\; \pi_{2,t} = \pi_{2,0}(0.7)^t = (0.5)(0.7)^t \tag{17}$$

ここで、(17) より $\pi_{2,t} = (0.5)(0.7)^t$ を代入すると

$$\pi_{1,t} = \pi_{1,t-1} + 0.2\pi_{2,t-1} \;\Rightarrow\; \pi_{1,t} = \pi_{1,0} + 0.2\sum_{j=1}^{t} \pi_{2,t-j} \;\Rightarrow\; \pi_{1,t} = 0.2 + 0.1\left(\frac{1-0.7^t}{1-0.7}\right) \tag{18}$$

$$\pi_{3,t} = \pi_{3,t-1} + 0.1\pi_{2,t-1} \;\Rightarrow\; \pi_{3,t} = \pi_{3,0} + 0.1\sum_{j=1}^{t} \pi_{2,t-j} \;\Rightarrow\; \pi_{3,t} = 0.3 + 0.05\left(\frac{1-0.7^t}{1-0.7}\right) \tag{19}$$

従って、任意の $t \geq 0$ 期における確率分布 $\boldsymbol{\pi}_t = [\pi_{1,t}, \pi_{2,t}, \pi_{3,t}]'$ は以下の様に表される[2]。

$$\pi_{1,t} = 0.2 + 0.1\left(\frac{1-0.7^t}{1-0.7}\right) \tag{20}$$

$$\pi_{2,t} = (0.5)(0.7)^t \tag{21}$$

$$\pi_{3,t} = 0.3 + 0.05\left(\frac{1-0.7^t}{1-0.7}\right) \tag{22}$$

[2] (17)、(18)、(19) 式のそれぞれに $t \to \infty$ の極限をとると、(問題 2-2) で求めた定常分布と一致することが確認される。

問題3

(Exercise 2.2)

Transition matrix を

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \tag{23}$$

と表す。但し、$P_{ij} = \Pr(\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{e}_j \big| \mathbf{x}_t = \mathbf{e}_i)$ である。まず、問題で与えられている y_{t+1} と y_{t+1}^2 の条件付き期待値は次のように計算される。

$$E(y_{t+1}\big|\mathbf{x}_t) = \begin{bmatrix} E(y_{t+1}\big|\mathbf{x}_t = \mathbf{e}_1) \\ E(y_{t+1}\big|\mathbf{x}_t = \mathbf{e}_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.8 \\ 3.4 \end{bmatrix} \tag{24}$$

$$E(y_{t+1}^2\big|\mathbf{x}_t) = \begin{bmatrix} E(y_{t+1}^2\big|\mathbf{x}_t = \mathbf{e}_1) \\ E(y_{t+1}^2\big|\mathbf{x}_t = \mathbf{e}_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.8 \\ 15.4 \end{bmatrix} \tag{25}$$

この時、上記のベクトルの各要素は次のように taransition matrrix の要素を用いて表すことができる。

$$\begin{aligned} E(y_{t+1}\big|\mathbf{x}_t = \mathbf{e}_1) &= \Pr(\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{e}_1\big|\mathbf{x}_t = \mathbf{e}_1)\bar{\mathbf{y}}'\mathbf{e}_1 + \Pr(\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{e}_2\big|\mathbf{x}_t = \mathbf{e}_1)\bar{\mathbf{y}}'\mathbf{e}_2 \\ &= P_{11} + 5P_{12} = 1.8 && (26) \\ E(y_{t+1}\big|\mathbf{x}_t = \mathbf{e}_2) &= P_{21} + 5P_{22} = 3.4 && (27) \\ E(y_{t+1}^2\big|\mathbf{x}_t = \mathbf{e}_1) &= \Pr(\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{e}_1\big|\mathbf{x}_t = \mathbf{e}_1)\left(\bar{\mathbf{y}}'\mathbf{e}_1\right)^2 + \Pr(\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{e}_2\big|\mathbf{x}_t = \mathbf{e}_1)\left(\bar{\mathbf{y}}'\mathbf{e}_2\right)^2 \\ &= P_{11} + 25P_{12} = 5.8 && (28) \\ E(y_{t+1}^2\big|\mathbf{x}_t = \mathbf{e}_2) &= P_{21} + 25P_{22} = 15.4 && (29) \end{aligned}$$

従って、(25) と (27)、(26) と (28) をそれぞれまとめると、

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} \\ P_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.8 \\ 5.8 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{21} \\ P_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.4 \\ 15.4 \end{bmatrix} \tag{30}$$

上記の条件式より、Transition matrix は

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix} \tag{31}$$

である。また、列ベクトル $[1,1]'$ と $[5,25]'$ は一次独立なので係数行列は full rank。従って、P_{11}、P_{12}、P_{21}、P_{22} は一意に決定される。

(Exercise 2.10)

π_1、π_2 はそれぞれ、transition matrix の転置行列 $\mathbf{P}'$ の固有値 1 に対応する固有ベクトルなので

$$(\mathbf{I} - \mathbf{P}')\pi_1 = 0,\ (\mathbf{I} - \mathbf{P}')\pi_2 = 0 \tag{32}$$

を満たす。この時、任意の $\alpha \in [0,1]$ について上記の 2 式の線形結合をとると

$$\alpha\pi_1 + (1-\alpha)\pi_2 = \alpha(\mathbf{I}-\mathbf{P}')\pi_1 + (1-\alpha)(\mathbf{I}-\mathbf{P}')\pi_2 = (\mathbf{I}-\mathbf{P}')\{\alpha\pi_1 + (1-\alpha)\pi_2\} = 0 \tag{33}$$

(32) 式は $\alpha\pi_1 + (1-\alpha)\pi_2$ も $\mathbf{P}'$ の固有値 1 に対応する固有ベクトルであることを表す。従って、π_1、π_2 が $\mathbf{P}$ の定常分布ならば、$\alpha\pi_1 + (1-\alpha)\pi_2$ も $\mathbf{P}$ の定常分布である。

(Exercise 2.12)

state の数を n、t 期の確率分布を $\boldsymbol{\pi}_t = [\pi_{1,t}, \cdots, \pi_{n,t}]'$ とする。この時、

$$\boldsymbol{\pi}_t' = \boldsymbol{\pi}_0'\mathbf{P}^t = \begin{bmatrix}\pi_{1,0}, \cdots, \pi_{n,0}\end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11}^t & \cdots & P_{1n}^t \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{n1}^t & \cdots & P_{nn}^t \end{bmatrix} \tag{34}$$

但し、P_{ij}^t は $\mathbf{P}^t$ の第 (i,j) 要素を表す。この時、初期条件より $\pi_{j,0} = 1$、$\pi_{i,0} = 0\ \forall i \neq j$ より、上記の内積は次のように展開される。

$$\boldsymbol{\pi}_t' = \boldsymbol{\pi}_0'\mathbf{P}^t = \begin{bmatrix} P_{j,1}^t & \cdots & P_{j,n}^t \end{bmatrix} \tag{35}$$

従って $\boldsymbol{\pi}_t$ は $\mathbf{P}^t$ の第 j 行と一致するので、$\mathbf{P}^t$ の第 j 行は t 期の各 state に対する確率分布を表していると言える。